Curs intensiu de Matemàtiques
Resum de teoria

Vera Sacristán i Jaume Soler

Departament de Matemàtica Aplicada II
Facultat d'Informàtica de Barcelona
Curs 2012-13

Capítol 1

Demostracions

1.1 El llenguatge formal

Una *proposició* és qualsevol frase que afirma alguna cosa. Una proposició pot ser *vertadera* (també *certa*) o *falsa*. Un exemple de proposició és "3+2=5", que és certa. Un altre exemple és "3+2 = 4", que és falsa.

Una proposició pot contenir *variables*, és a dir, lletres que poden ser substituïdes per altres expressions. El valor de veritat (ser cert o fals) d'una proposició amb variables pot dependre del valor de les variables. Per exemple, la proposició "x és parell" és certa per a $x = 6$, però falsa per a $x = 9$.

De vegades, una proposició pot afirmar alguna cosa de totes les variables d'un univers donat. Per exemple, a l'univers dels nombres naturals, la proposició "per a tot x, el nombre $2x + 1$ és estrictament positiu"és certa, mentre que la proposició "existeix algun x tal que $-2x$ és estrictament positiu"és falsa. L'expressió "per a tot x"s'escriu $\forall x$. L'expressió "existeix algun x"s'escriu $\exists x$. Les proposicions anteriors s'escriuen, respectivament,

$$\begin{aligned} &\forall x \quad 2x + 1 > 0; \\ &\exists x \quad -2x > 0. \end{aligned}$$

Els connectius lògics. Els connectius lògics permeten formar proposicions més complexes a partir de proposicions elementals. Hi ha cinc connectius lògics particularment importants, que formalitzen expressions del llenguatge comú.

- **Negació**. S'expressa mitjançant "no" o bé amb el símbol $\neg$. Formalitza la negació del llenguatge comú. Si Q és una proposició, aleshores no Q (o bé $\neg Q$) és falsa si Q és vertadera i vertadera si Q és falsa.

- **Conjunció**. S'expressa mitjançant "i" o bé amb el símbol $\wedge$. La proposició $P \wedge Q$ és certa únicament en el cas que P i Q siguin totes dues certes. Per a les altres tres combinacions de valors de P i Q (cert-fals, fals-cert i fals-fals) la proposició $P \wedge Q$ és falsa.

- **Disjunció**. S'expressa mitjançant "o" o bé amb el símbol $\vee$. La proposició $P \vee Q$ és certa quan una de les proposicions P i Q és certa, o bé quan les dues són certes. És a dir, $P \vee Q$ és certa per a les combinacions cert-fals, fals-cert i cert-cert, i és falsa únicament per a la combinació fals-fals.

Observació: moltes vegades el llenguatge comú fa servir la disjunció en el sentit de *disjunció exclusiva*: només una de les proposicions P i Q és certa. És important parar atenció a la diferència entre "una de les dues proposicions és certa" i "només una de les dues proposicions és certa".

- **Condicional**. S'expressa mitjançant "si...aleshores..." o bé amb el símbol $\to$. La proposició $P \to Q$ és certa quan P i Q són certes, o bé quan P és fals. És a dir, $P \to Q$ és certa per a les combinacions cert-cert, fals-cert i fals-fals, i és falsa únicament per a la combinació cert-fals.

- **Bicondicional**. S'expressa mitjançant "si, i només si," o bé amb el símbol $\leftrightarrow$. La proposició $P \leftrightarrow Q$ és certa quan P i Q prenen el mateix valor de veritat. És a dir, $P \leftrightarrow Q$ és certa per a les combinacions cert-cert, i fals-fals, i és falsa altrament.

Propietats dels connectius lògics. Si interpretem els connectius com a "operacions" entre proposicions, tenim les propietats següents:

1. $\neg\neg Q \equiv Q$.
2. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$,
   $P \vee Q \equiv Q \vee P$,
   $P \leftrightarrow Q \equiv Q \leftrightarrow P$.
3. $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$,
   $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$.
4. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,
   $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
5. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$,
   $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$,
   $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$.

No hi ha regles molt estrictes sobre la precedència dels operadors lògics quan s'escriu en paper o a la pissarra (sí que hi són quan es tracta de llenguatges de programació com ara C o C++, per exemple). Per tant, cal estar alerta a posar parèntesis en cas de possible ambigüitat.

1.2 Teoria de conjunts no formal

La relació de pertinença a un conjunt es denota mitjançant el símbol $\in$. Així, $x \in A$ es llegeix "x pertany a A" (o x és un element d'A) i $z \notin B$ es llegeix "z no pertany a B".

Hi ha dues maneres d'especificar un conjunt:

1. donant una llista de tots els seus elements, per exemple $A = \{1, 3, 5, 7\}$;
2. donant un conjunt més gran i una propietat per a seleccionar-ne alguns elements: $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és múltiple de } 2\}$, on $\mathbb{Z}$ és el conjunt dels nombres enters.

Direm que un conjunt C està contingut a D (o inclòs a D o és una part de D) si tots els elements de C també són elements de D. Escriurem $C \subseteq D$ per indicar aquesta relació. Quan es té $C \subseteq D$ però $C \neq D$, es sol escriure $C \subsetneq D$ o també $C \subset D$. Cal parar atenció, ja que en els textos de matemàtiques aquesta darrera notació de vegades s'empra com a sinònim de $C \subsetneq D$ i de vegades com a sinònim de $C \subseteq D$.

En tot el que segueix pensarem que tenim conjunts A, B, ... (habitualment representats amb lletres llatines majúscules) que estan tots continguts dins d'un conjunt universal U. Podem definir unes operacions entre conjunts:

- **intersecció**: $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$;
- **unió**: $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$;
- **complementari**: $A^c = \overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$.

Està clar que aquestes operacions es corresponen, respectivament, amb la conjunció, disjunció i negació de proposicions vistes més amunt.

1.3 Conjunts de nombres

Els conjunts de nombres que es fan servir més sovint en matemàtiques (i que corresponen a generalitzacions successives del concepte de nombre) són els següents.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Conjunt dels nombres naturals (o enters positius). Són els que serveixen per a comptar. Optativament s'hi pot incloure el zero. Dins d'aquest conjunt sempre podem sumar, però de vegades no podem restar (per exemple, $4 - 7$ no està dins del conjunt).
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Conjunt dels nombres enters. Podem sumar, restar i multiplicar sense sortir-nos mai del conjunt, però no sempre podem dividir (podem dividir 6 entre 2, però no pas 7 entre 4).
- $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Conjunt dels nombres racionals o fraccions. Podem efectuar les quatre operacions elementals sense sortir del conjunt, excepte dividir per zero. No sempre podem, però, extraure arrels (per exemple, tenim $9 \in \mathbb{Q}$ i $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$, però $2 \in \mathbb{Q}$ i $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ i per això diem que $\sqrt{2}$ és *irracional*).
- $\mathbb{R}$. Conjunt dels nombres reals. Inclou els racionals, els radicals de nombres positius i coses més estranyes com ara π, e (la base dels logaritmes naturals) o $\log 4.5$. El conjunt dels nombres reals formalitza la noció de punts d'una recta de la geometria elemental.

- $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$. Conjunt dels nombres complexos. Construïts a partir dels reals per tal que qualsevol polinomi tingui sempre arrels. Es representen en un pla, on cada nombre complex $x + iy$ s'identifica amb el punt (x, y) del pla en coordenades cartesianes.

Evidentment es compleix $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.4 Tècniques de demostració

En matemàtiques no es distingeixen tipus diferents de demostració, però si que, a la pràctica, es pot donar una llista més o menys difusa de tècniques.

- Demostració directa: per demostrar $A \to B$ es parteix de la *hipòtesi* (allò que se suposa cert), A, i es fan raonaments fins arribar a la *tesi* (allò que es vol demostrar), B.

- Demostració per *contrarrecíproc*: es parteix de la negació de la tesi, $\neg B$, i es fan raonaments fins arribar a la negació de la hipòtesi, $\neg A$.

  Observació: cal no confondre el contrarrecíproc amb el *recíproc*.

- Demostració per *reducció a l'absurd*: es vol demostrar que B és cert. Afegim la seva negació $\neg B$ temporalment als axiomes de la matemàtica i arribem a una contradicció. Aleshores podem garantir que B és cert.

  Observació: a vegades es diu que es fa una demostració per reducció a l'absurd però es pot reformular de manera trivial a una demostració per contrarrecíproc.

- Demostració per casos: es poden afegir hipòtesis i fer diverses demostracions sempre que les hipòtesis afegides cobreixin tots els casos. Per exemple, per demostrar alguna propietat dels nombres enters podríem fer una demostració per als parells i una altra (possiblement diferent) per als senars, perquè això ja cobreix tots els casos.

Capítol 2

Manipulació algebraica

2.1 Precedència d'operadors

Els convenis usuals. Considerem una expressió com ara $3 + 4 \cdot 2$, que conté dues operacions (una suma i un producte) i tres operands. Es tracta d'una llista d'instruccions que podríem donar a qualsevol persona o màquina perquè faci un càlcul. La llista no diu, però, quina operació s'ha d'efectuar en primer lloc. Si fem primer el producte tenim $3 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11$; si fem primer la suma, tenim $3+4\cdot 2 = 7\cdot 2 = 14$. Per tant, la llista d'instruccions no és completa, falta dir quina és l'operació que s'ha de fer primer. Això es fa, a la pràctica, posant parèntesis: o bé escrivim $(3 + 4) \cdot 2$, o bé escrivim $3 + (4 \cdot 2)$, i ambdues llistes d'instruccions són ara inequívoques (en el sentit que qualsevol persona o màquina obtindrà el mateix resultat).

A la pràctica, per tal de simplificar les expressions al màxim, s'estableix l'acord següent(pràcticament universal): sempre que s'escrigui l'expressió anterior sense parèntesis s'entendrà que els parèntesis estan (però no s'han escrit) en el producte; és a dir: es fan primer els productes a menys que els parèntesis indiquin el contrari. En termes més formals podem dir que s'adopta el **conveni** següent:

- l'operació producte "$\cdot$" té precedència sobre l'operació suma "+".

Comentari 1: no és incorrecte escriure $3 + (4 \cdot 2)$; simplement els parèntesis són redundants.

Comentari 2: no és bona idea posar molts parèntesis de més "per si de cas": les expressions amb molts parèntesis redundants són indiferents per a una màquina, però il·legibles per als humans.

Comentari 3: si bé el símbol habitual per al producte és el punt "$\cdot$" o a vegades l'aspa "$\times$", en matemàtiques es habitual suprimir el punt de producte si no és estrictament necessari. Així doncs, ax vol dir $a \cdot x$ i també se sobreentén que hi ha un punt davant d'un parèntesi o d'una barra de fracció horitzontal: $3(4 + 5)$ i $3\frac{1}{2}$ volen dir, respectivament $3 \cdot (4 + 5)$ i $3 \cdot \frac{1}{2}$. En altres àrees, els convenis poden ser diferents. Per exemple, en llenguatges de programació és habitual que les variables tinguin noms amb més d'una lletra (no es fan servir subíndexs) i el producte s'indica amb un asterisc i no s'omet mai.

La propietat associativa. En alguns casos hi ha propietats de les operacions entre nombres que ens permeten prescindir de parèntesis. Per exemple, les expressions $(3+4)+2$ i $3+(4+2)$, que són instruccions correctes perquè diuen quina operació s'ha de fer primer, donen el mateix resultat. Aleshores diem que la suma té la propietat *associativa* i escrivim simplement $3+4+2$. Una vegada més, no és incorrecte posar parèntesis en aquest cas, és simplement irrellevant.

Comentari: sense la propietat associativa, l'expressió $3 + 4 + 2$ seria incorrecta, perquè no sabem sumar tres nombres alhora: la suma només està definida per a dos nombres.

Tot el que s'ha dit fins ara de la propietat associativa de la suma també val per al producte. Enunciem formalment, doncs, la propietat associativa per a la suma i el producte: donats tres nombres qualssevol, a, b i c, es té

- $a+(b+c)=(a+b)+c$,
- $a(bc)=(ab)c$.

La propietat commutativa. Tant la suma com el producte satisfan la propietat commutativa, és a dir, per a qualsevol parella de nombres es té

- $a+b=b+a$,
- $ab=ba$.

Cal tenir present que a vegades (per exemple, en el cas del producte de matrius) la propietat commutativa no es compleix (l'associativa si), cosa que dóna lloc a diversos maldecaps.

La propietat distributiva. Donats tres nombres qualssevol a, b i c, es compleix

- $a(b+c)=ab+ac$.

Altres operacions. En matemàtiques es tendeix a pensar que hi ha dues operacions (suma i producte) i que les operacions anomenades "resta" i "divisió" consisteixen simplement a sumar l'oposat o a multiplicar per l'invers. D'aquesta manera, la divisió és distributiva respecte de la suma perquè la podem pensar com la multiplicació per l'invers (ja que dividir per 3 és el mateix que multiplicar per $1/3$).
En llenguatges de programació, en canvi, es parla d'operacions (o *operadors*) i s'estudien al mateix nivell suma, resta, producte, divisió, exponenciació i fins i tot el canvi de signe. Vistes d'aquesta manera, la resta i la divisió no són ni commutatives ni associatives i, per tant, és molt important precisar el conveni de precedència d'operadors que es farà servir. Els llenguatges de programació tipus C, FORTRAN o Java utilitzen els seus propis convenis de precedència per a donar sentit a expressions del tipus $a/b/c$ o $a/b*c$. En matemàtiques, aquestes expressions es consideren ambigües i es recomana no escriure-les.

Els arguments de funcions. Com a conveni general, els arguments de funcions van sempre entre parèntesis. Per exemple, parlem de la funció $f(x)$ o de $g(z)$.

A la pràctica, però, les funcions elementals tendeixen a escapar-se d'aquesta regla i, per exemple, és molt habitual escriure $\sin x$ i $\log x$ en comptes de $\sin(x)$ i $\log(x)$. El problema apareix quan l'argument és una expressió més complexa. Per exemple, tothom interpreta $\sin 3 + x$ com $(\sin(3)) + x$; però si escrivim $\sin 3x$ interpretem $\sin(3x)$ i no pas $(\sin 3)x$. En canvi, interpretem $\sin x \cos x$ com $(\sin x)(\cos x)$ i no pas com $\sin(x \cos x)$. Les funcions trigonomètriques són un exemple d'àrea on la manera d'escriure és una barreja de tradicions antigues i de convenis moderns. La perla de la confusió és l'expressió $\sin^2 x$, que s'interpreta sempre com $(\sin x)^2$. En canvi, l'expressió $\log^2 x$ suggereix tant $(\log x)^2$ com $\log(\log x)$.

2.2 Els símbols $\sum$ i $\prod$

Suposem que EXPR és una expressió més o menys complexa on figura, possiblement entre d'altres, la lletra i. Aleshores, $\displaystyle\sum_{i=3}^{7} \text{EXPR}$ significa:

1. la variable i pren successivament els valors $3, 4, 5, 6, 7$;
2. per a cada un d'aquests valors fem una còpia de l'expressió EXPR i substituïm totes les lletres i que hi apareixen pel valor que estiguem considerant en aquell moment;
3. ho sumem tot.

Exemple: suposem que $\text{EXPR} = 3 + j + i + i^2$. Aleshores

$$\sum_{i=3}^{5} (3 + j + i + i^2) = (3 + j + 3 + 3^2) + (3 + j + 4 + 4^2) + (3 + j + 5 + 5^2).$$

S'ha d'entendre que el símbol de sumatori és únicament una manera abreujada d'escriure "fórmules" llargues.

El símbol $\prod$ és l'anàleg per al producte en comptes de la suma. Per exemple, tindríem

$$\prod_{i=3}^{5} (3 + j + i + i^2) = (3 + j + 3 + 3^2)(3 + j + 4 + 4^2)(3 + j + 5 + 5^2).$$

Moltes vegades els sumatoris es fan servir per indicar la suma de "n" termes, on n és un nombre que volem deixar indeterminat. Per tant, té sentit escriure

$$\sum_{i=3}^{n} (3 + j + i + i^2).$$

També pot ser indeterminat el valor inferior de l'interval de variació de la i, i podem escriure

$$\sum_{i=m}^{n} (3 + j + i + i^2).$$

Observació 1: les variables internes dels sumatoris s'anomenen *variables mudes* i es poden canviar per qualsevol altre símbol: és evident que

$$\sum_{i=m}^{n}(3+j+i+i^2)=\sum_{k=m}^{n}(3+j+k+k^2)=\sum_{s=m}^{n}(3+j+s+s^2)$$

(en canvi, en aquest exemple, no podem substituir la i per j perquè en aquesta expressió ja hi ha una variable j).

Observació 2.: donat que un sumatori no és més que una suma, la precedència d'operacions i l'ús de parèntesis segueixen les mateixes regles que per a les expressions sense sumatoris. Cal parar atenció, però, a l'exemple següent.

Exemple. Observeu la diferència entre les expressions

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(i+2)=(1+2)+(2+2)+(3+2)+(4+2)=18,$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i+2=(1+2+3+4)+2=12.$

Per tal d'evitar confusions, un cert "manual d'estil" (no publicat enlloc) aconsella que la segona expressió no s'escrigui com apareix aquí sinó que s'utilitzi la forma $2+\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i$.

2.3 Progressions

Una *progressió aritmètica* és una successió de nombres $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}$ tal que per a cada i es compleix $a_{i+1}=a_i+d$, on d és una constant (anomenada *diferència* de la progressió). És a dir, cada terme és igual a l'anterior més una constant.

Una *progressió geomètrica* és una successió de nombres $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}$ tal que per a cada i es compleix $a_{i+1}=ka_i$, on k és una constant anomenada *raó* de la progressió. És a dir, cada terme és igual a l'anterior multiplicat per una constant.

Si $\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ és una progressió aritmètica de diferència d i $\{b_1,b_2,b_3,\ldots\}$ una progressió geomètrica de raó r, són conegudes les fórmules següents per a la suma i el producte dels seus n primers termes:

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i=\frac{a_1+a_n}{2}n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,$
- $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} b_i=\sqrt{(b_1b_n)^n},$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i=\frac{b_nr-b_1}{r-1}=b_1\frac{r^n-1}{r-1}.$

Cal tenir present que les fórmules anteriors canvien una mica si es comencen a numerar els termes de les progressions a partir del zero (és a dir, si escrivim la progressió com $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$), o a partir de qualsevol altre índex $i \neq 1$. No existeix una fórmula tancada per al producte de n termes d'una progressió aritmètica. Si bé el producte dels n primers termes de la progressió aritmètica $1, 2, 3, 4, \ldots$ es representa habitualment per $n!$ (factorial de n), la veritat és que $n!$ no és pròpiament una fórmula tancada sinó una simple abreviatura.

2.4 Desigualtats

Les desigualtats s'expressen mitjançant els símbols següents:

- $a \leq b$, llegit "a és més petit o igual que b" (o també "b és més gran o igual que a", que també es pot escriure $b \geq a$). Aquestes desigualtats es diuen "àmplies" perquè està permesa la igualtat.

- $a < b$, llegit "a és més petit que b" (o també "b és més gran que a", que també es pot escriure $b > a$). A vegades es fa èmfasi en què la igualtat no està permesa i s'afegeix la paraula "estrictament". També es diu que la desigualtat és "estricta".

Una desigualtat entre expressions que contenen alguna variable o "incògnita" s'acostuma a anomenar *inequació*. El problema és, habitualment, trobar per a quins valors de la incògnita la desigualtat és certa. Per a això es pot manipular la desigualtat de manera semblant a com es fa per resoldre equacions, amb algunes diferències, és clar.

Manipulació de desigualtats. Totes les receptes per a manipular desigualtats (igual que per a les equacions) surten d'unes poques regles molt simples i lògiques:

1. Si $a \leq b$, aleshores $a + c \leq b + c$ per a qualsevol c (es pot sumar o restar el mateix nombre a cada costat d'una desigualtat).

2. Si $a \leq b$ i $c > 0$ aleshores $ac \leq bc$ (es pot multiplicar o dividir cada costat d'una desigualtat pel mateix nombre positiu).

3. Si $a \leq b$ i $c < 0$ aleshores $ac \geq bc$ (si es multiplica o divideix cada costat d'una desigualtat pel mateix nombre negatiu, la desigualtat canvia de sentit).

4. Si $a \leq b$ i $b \leq a$, aleshores $a = b$.

5. Si $a \leq b$ i $b \leq c$, aleshores $a \leq c$.

A l'hora de treballar amb desigualtats, pot ser útil pensar que si apliquem a cada banda d'una desigualtat una funció creixent, la desigualtat no canvia (i si la funció és decreixent, canvia de sentit). A aquests efectes, són particularment útils les funcions següents, però cal estar alerta a l'interval on estan definides.

- e^x, per a $x \in \mathbb{R}$.

- $\log x$, per a $x > 0$; log és aquí el logaritme natural o qualsevol logaritme en base més gran que 1.

- x^a, per $a \in \mathbb{R}$ i $x \geq 0$.

Comentari: voluntàriament s'ha limitat la funció x^a a valors de x positius. Si bé és cert que podem definir $(-8)^{1/3} = -2$ i, en general, disposem de la funció $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ definida i creixent sobre tot $\mathbb{R}$, no és gens clar quin significat podríem assignar a $(-8)^{\sqrt{2}}$ (veugeu el tema següent).

Exemple 1: trobeu el conjunt dels valors de x solució de la inequació $3 - 2x \leq 4$.
Resolució: si sumo -3 a cada costat, obtinc la desigualtat equivalent $-2x \leq 1$. Si ara divideixo per -2 a cada costat, obtinc $x \geq -1/2$, que és la solució.

Exemple 2: trobeu per a quins valors de x es compleix que $0.3^x \leq 0.02$.
Resolució: prenent logaritmes a cada costat tinc $x \log 0.3 \leq \log 0.02$. Si ara divideixo cada costat per $\log 0.3$ ja hauré acabat, però he de tenir en compte que $\log 0.3$ és negatiu i, per tant, he de canviar el sentit de la desigualtat. El resultat és, doncs, $x \geq \log 0.02/\log 0.3$.

El valor absolut. Definim el valor absolut d'un nombre real x com

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0; \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les propietats següents es demostren fàcilment a partir de la definició:

1. $|x| \geq 0$, per a tota x;
2. $|xy| = |x||y|$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
4. $|x| \leq a$ si, i sols si, $-a \leq x \leq a$.

La part entera. Definim la part entera d'un nombre real x com el nombre enter més gran de tots els que són més petits o iguals que x:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Així doncs, es satisfan les propietats següents:

1. $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, per a tota x;
2. $\lfloor x \rfloor \leq x$;
3. $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

De vegades pot ser útil fer servir la part entera superior d'un nombre real x:

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}.$$

2.5 El binomi de Newton

Sigui n un nombre enter no negatiu. Definim $n!$ (*factorial* de n) com

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Siguin n i m dos enters no negatius, amb $m \geq n$. Definim el *nombre combinatori* o *coeficient binomial* $\binom{m}{n}$ com

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}.$$

És immediat comprovar dues propietats fonamentals:

1. $\displaystyle\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$,

2. $\displaystyle\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$.

Amb aquestes definicions es té l'expressió següent per a les potències enteres d'un binomi:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

El triangle de Pascal (o de Tartaglia). Els coeficients del binomi es poden calcular amb el triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

on cada element s'obté sumant els dos elements més pròxims de la fila immediatament superior.

Capítol 3

Funcions elementals

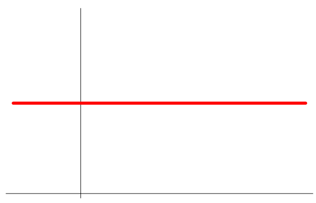
Una mica de llenguatge. Donada una aplicació entre dos conjunts, $f : A \to B$, s'utilitza la terminologia següent:

- El *domini* de f és el conjunt A.
- La *imatge* de f és el subconjunt de B format per tots els elements de la forma $f(a)$, on $a \in A$. S'escriu $Imf = f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A \; b = f(a)\}$.
- Es diu que f és *exhaustiva* si $f(A) = B$.
- Es diu que f és *injectiva* si $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$. Això és el mateix que dir $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.
- Es diu que f és *bijectiva* si és injectiva i exhaustiva.

Funcions constants. Són les de la forma

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & c \end{array}$$

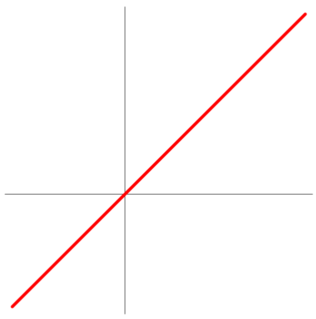
on $c \in \mathbb{R}$ és una constant. La seva gràfica és la recta horitzontal d'equació $y = c$:



Funció identitat. És la funció de la forma

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

La seva gràfica és la recta que passa per l'origen i bisecta el primer quadrant del pla, que té equació $y = x$:

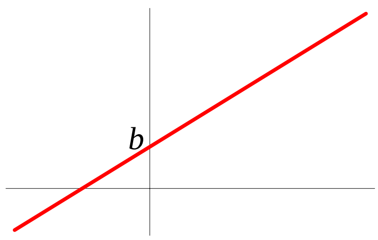


Funcions polinòmiques. A partir dels dos tipus de funcions anteriors, i per mitjà de sumes i productes, s'obtenen les funcions polinòmiques:

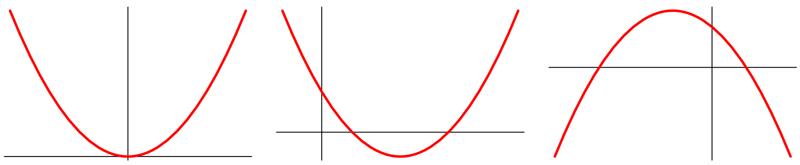
$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

on $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. En particular, són funcions polinòmiques les següents:

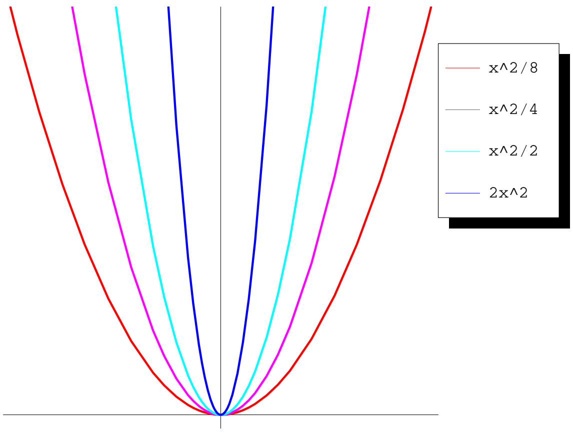
1. **Funcions lineals.** Són les funcions polinòmiques de grau 1, és a dir, les que tenen expressió $f(x) = ax + b$. La seva gràfica és una recta de pendent a que talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, b)$:



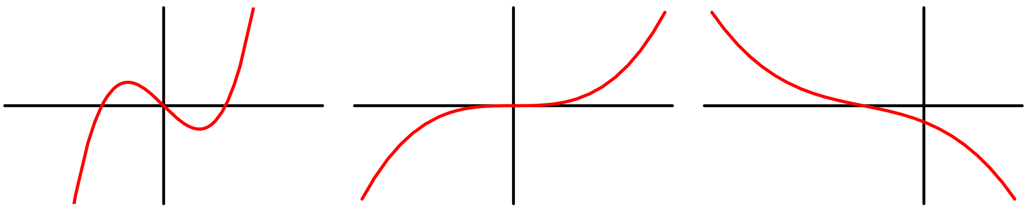
2. **Funcions quadràtiques.** Són les funcions polinòmiques de grau 2, és a dir, les que tenen expressió $f(x) = ax^2 + bx + c$. La seva gràfica és una paràbola convexa o còncava en funció del signe del coeficient a.



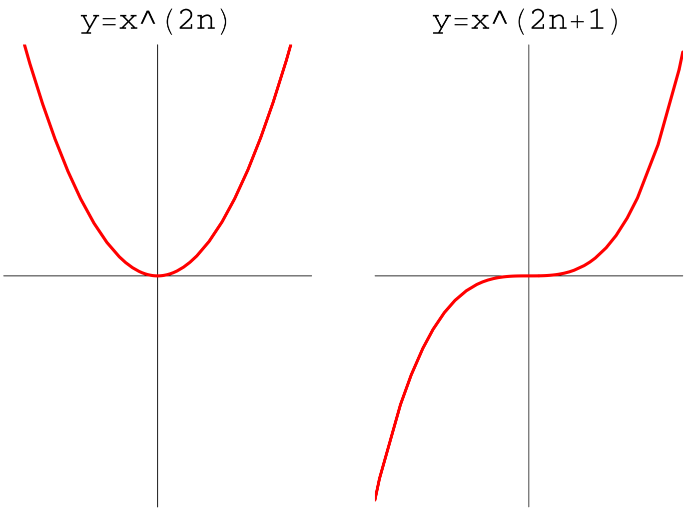
L'obertura de la paràbola depèn del coeficient a, l'eix de la paràbola és la recta $x = -b/2a$, el vèrtex de la paràbola és el punt $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$, i la paràbola talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, c)$.



3. **Funcions cúbiques.** Són les funcions polinòmiques de grau 3, és a dir, les que tenen expressió $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. La seva gràfica pot tenir aspectes com els següents:



4. **Funcions polinòmiques de potència parella (senar).** Són les funcions del tipus $f(x) = x^{2n}$ (resp. $f(x) = x^{2n+1}$), on $n \in \mathbb{N}$. Les seves gràfiques tenen l'aspecte següent:



Funcions racionals. Són quocients de funcions polinòmiques:

$$\begin{array}{rccl} r: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$

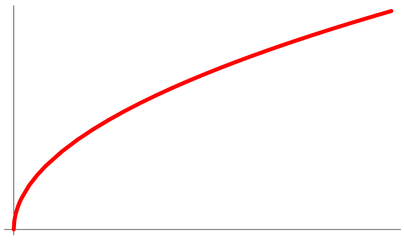
on p i q són funcions polinòmiques. A més, el domini de r és $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Funcions transcendents. Les funcions que no es poden expressar com a funcions racionals s'anomenen transcendents. Les més utilitzades són les següents.

1. **Funció arrel quadrada.** És la funció

$$\begin{array}{rccc} \sqrt{\ }: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

que té la gràfica següent:



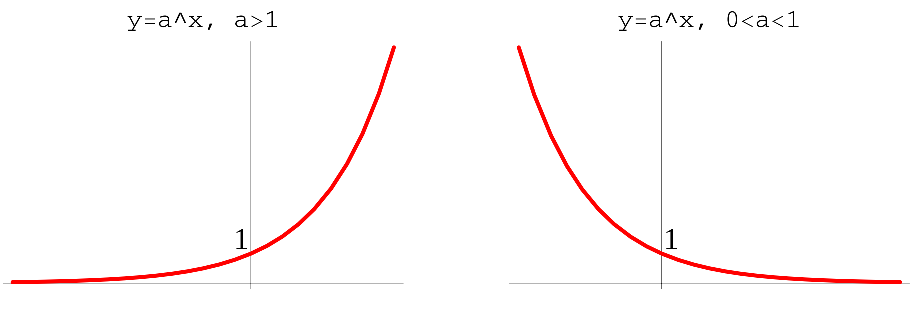
2. **Funcions exponencials.** Si $a > 0$, la funció exponencial de base a és

$$\begin{array}{rccc} \exp_a: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a^x \end{array}$$

on:

- Si $x = n \in \mathbb{N}$, aleshores $a^n = a \overset{n}{\cdots} a$.
- Si $x = n \in \mathbb{Z}^-$, aleshores $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.
- Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, aleshores $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.
- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, aleshores $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ per alguna successió de nombres $x_n \in \mathbb{Q}$, i es defineix $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$.

Aquestes són les gràfiques de les funcions exponencials, depenent de si la base a és més petita o més gran que 1:



Algunes propietats de les funcions exponencials són:

i) $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) La funció a^x és bijectiva entre $\mathbb{R}$ i $(0, +\infty)$.

iii) $a^0 = 1$.

iv) $a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

v) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

vi) $a^{xy} = (a^x)^y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

vii) No s'han de confondre $(a^x)^y$ i a^{x^y}.

viii) Si $a > 1$, aleshores a^x és estrictament creixent, és a dir:

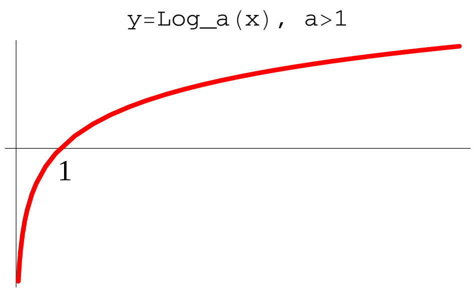
$$x < y \Rightarrow a^x < a^y.$$

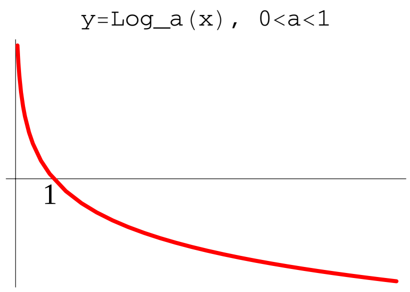
Si $0 < a < 1$, aleshores a^x és estrictament decreixent, és a dir:

$$x < y \Rightarrow a^x > a^y.$$

La funció exponencial per excel·lència és la que fa servir com a base el nombre $e = 2.71\ldots$.

3. **Funcions logarítmiques.** Aquestes funcions són les inverses de les funcions exponencials. Si $a > 0$, aleshores $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Les gràfiques d'aquestes funcions són:





Algunes propietats de les funcions logarítmiques són:

i) El domini de la funció és $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

ii) La funció $\log_a x$ és bijectiva entre $(0, +\infty)$ i $\mathbb{R}$.

iii) $\log_a 1 = 0$.

iv) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \forall\, x, y \in (0, +\infty)$.

v) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a - x \log_a y \quad \forall\, x, y \in (0, +\infty)$.

vi) $\log_a x^y = y \log_a x \quad \forall\, x \in (0, +\infty),\ \forall\, y \in \mathbb{R}$.

vii) $\forall\, a, b > 0,\ \log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

viii) Si $a > 1$, aleshores $\log_a x$ és estrictament creixent, és a dir:

$$x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y.$$

Si $0 < a < 1$, aleshores $\log_a x$ és estrictament decreixent, és a dir:

$$x < y \Rightarrow \log_a x > \log_a y.$$

ix) Si $a > 1$, aleshores

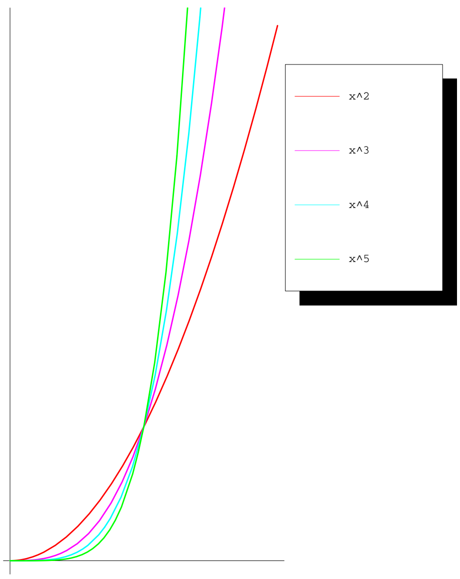
$$\log_a x \begin{cases} < 0, & \text{si } x < 1; \\ = 0, & \text{si } x = 1; \\ > 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

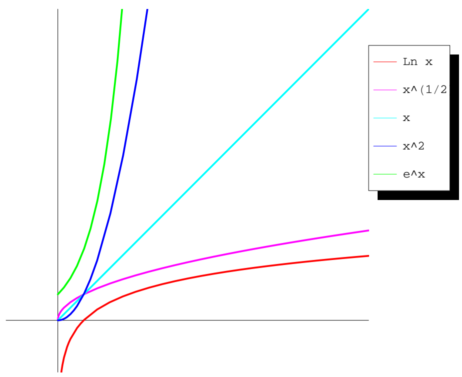
Si $0 < a < 1$, aleshores

$$\log_a x \begin{cases} > 0, & \text{si } x < 1; \\ = 0, & \text{si } x = 1; \\ < 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La funció logarítmica per excel·lència és la que fa servir com a base el nombre e. Aquest logaritme s'anomena *neperià* i s'escriu $\ln x$.

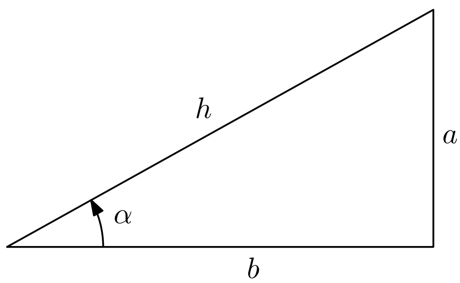
Les figures següents il·lustren el comportament comparat de diverses de les funcions anteriors.





4. **Les funcions trigonomètriques.** En un triangle rectangle definim les raons trigonomètriques d'un dels angles aguts α com a quocients de les longituds d'alguns costats. Exactament definim:

- $\sin\alpha = \dfrac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{h}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{h}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}} = \dfrac{a}{b}$



Les raons trigonomètriques satisfan dues relacions fonamentals:

i) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

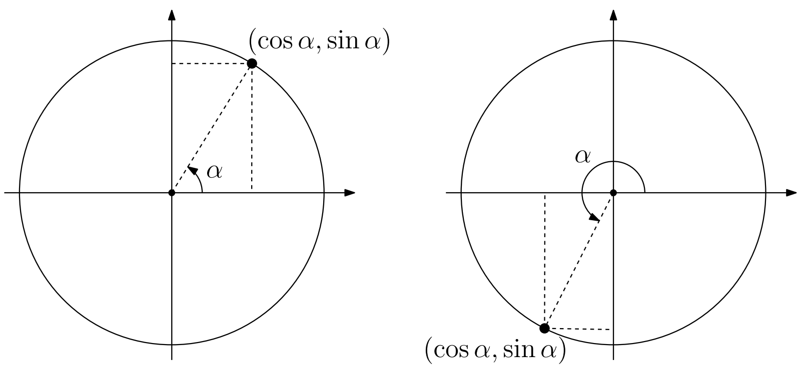
ii) $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

La primera surt immediatament del teorema de Pitàgores i la segona manipulant la definició de tangent.

Naturalment, el sinus i cosinus definits d'aquesta manera només estan definits per a $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Observació fonamental: Si considerem un quart de circumferència de radi 1 en el primer quadrant del pla cartesià, és evident que les coordenades de qualsevol punt són $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ on α és l'angle entre el semieix de les abscisses positives i el segment que uneix el punt a l'origen, prenent com a sentit positiu per als angles el contrari al sentit de les agulles del rellotge.

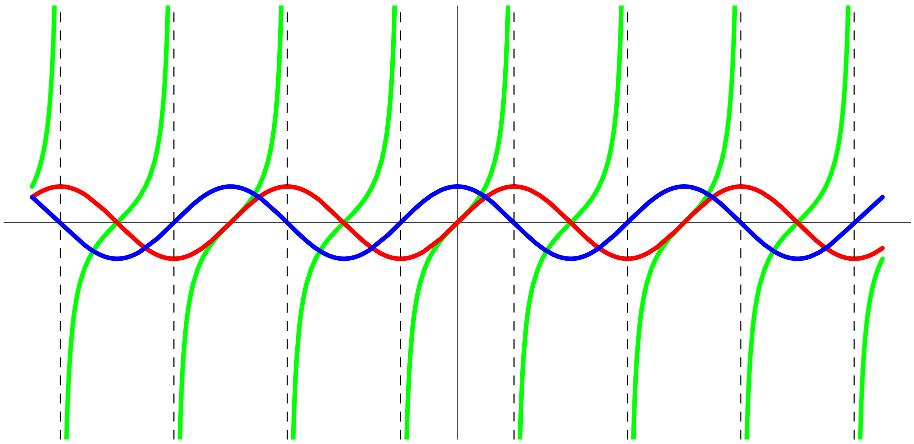
L'observació anterior és la que permet definir $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ per a qualsevol angle: es considera una semirrecta que surt de l'origen i forma un angle α amb la part positiva de l'eix de les x (en sentit positiu). Aquesta recta determina un punt sobre la circumferència de radi unitat centrada a l'origen. Definim $\cos \alpha$ com l'abscissa d'aquest punt i $\sin \alpha$ com la seva ordenada.



Amb això s'ha estès la definició de sinus i cosinus a qualsevol angle i parlarem a partir d'ara de les *funcions* $\sin x$ i $\cos x$. La funció tangent es defineix directament com $\tan x = \sin x / \cos x$.

Observació: la propietat 1 esmentada més amunt se segueix complint (com a conseqüència del teorema de Pitàgores). La propietat 2 també se segueix complint (com a conseqüència de la definició).

La figura següent il·lustra les funcions trigonomètriques: la corba vermella correspon a la funció sinus, la blava a la funció cosinus i la verda a la funció tangent.



Capítol 4

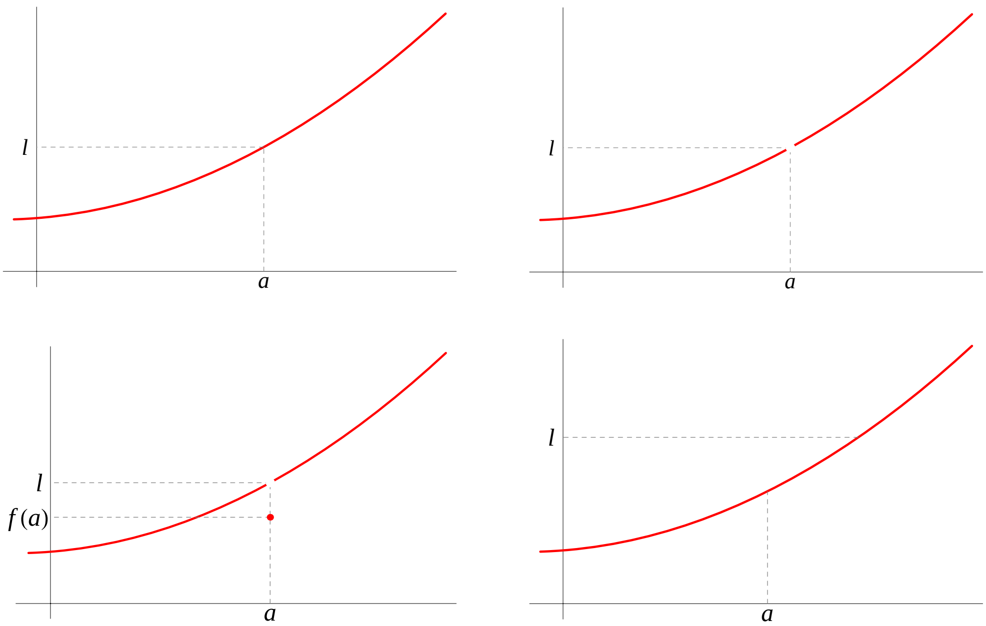
Càlcul

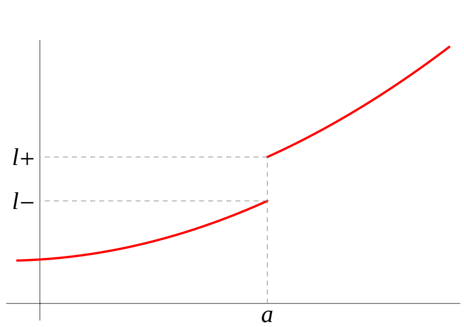
4.1 Límits de funcions

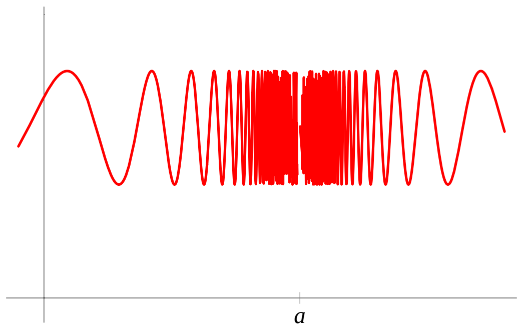
Sigui f una funció definida en un entorn (foradat) $A = (a-h, a+h) \setminus \{a\}$ del punt a, i sigui $l \in \mathbb{R}$. Es diu que l és el *límit de la funció f quan x tendeix a a*, i s'escriu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ quan

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in A \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

La figura següent il·lustra diverses situacions possibles. En els tres primers casos, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, en el quart cas $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l$, i en els casos cinquè i sisè $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.







Anàlogament, es tenen les definicions següents:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \epsilon$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \epsilon$$

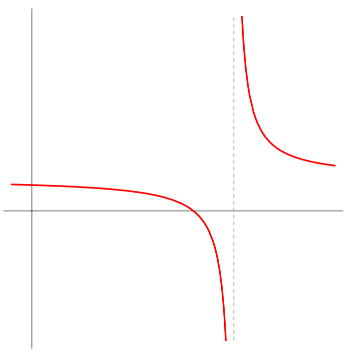
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad x < -\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad x < -\delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

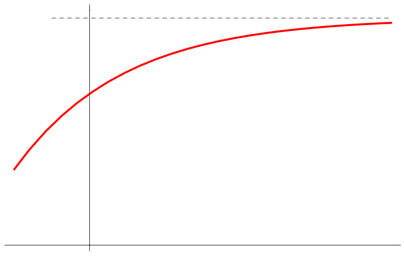
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in A \quad x < -\delta \Rightarrow |f(x)| > \epsilon$$

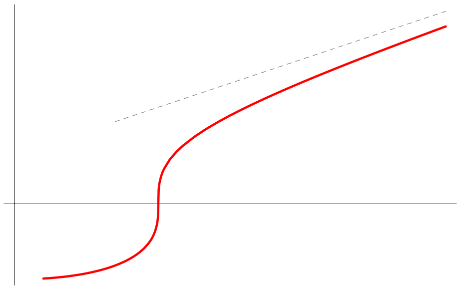
Quan $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, es diu que la recta $x = a$ és una *asímptota vertical* de la funció f.



Quan $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$, es diu que la recta $y = l$ és una *asímptota horitzontal* de la funció f.



Finalment, es diu que la recta $y = ax + b$ és una *asímptota obliqua* de la funció f quan $\lim_{x\to\pm\infty}(ax + b - f(x)) = 0$.



Propietats dels límits Suposem que existeixen $\lim_{x\to a} f(x)$ i $\lim_{x\to a} g(x)$. Aleshores:

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x)$.
3. $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$.
4. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

D'altra banda, si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim_{y\to b} g(y) = c$, aleshores $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

4.2 Derivada d'una funció en un punt

Sigui $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a,b)$. La funció f és *derivable* en x_0 si existeix el límit següent i és finit:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Aquest límit s'anomena *derivada* de f en x_0.

La derivada d'una funció f en un punt x_0 es pot interpretar geomètricament com el límit dels pendents de les cordes que passen pels punts $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$ quan $x \to x_0$, és a dir, com el pendent de la recta que passa pel punt $(x_0, f(x_0))$ i és tangent a f.

Propietats de les derivades. Siguin f i g dues funcions derivables en un cert punt c. Aleshores:

1. La funció $f+g$ és derivable en c i $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.
2. La funció λf és derivable en c i $(\lambda f)'(c) = \lambda f'(c)$.
3. La funció fg és derivable en c i $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.
4. La funció $\frac{f}{g}$ és derivable en c i $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$, si $g(c) \neq 0$.

Regla de la cadena. Si f i g són tals que $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Dom} g$, f és derivable en c i g és derivable en $f(c)$, aleshores la funció $g \circ f$ és derivable en c, i

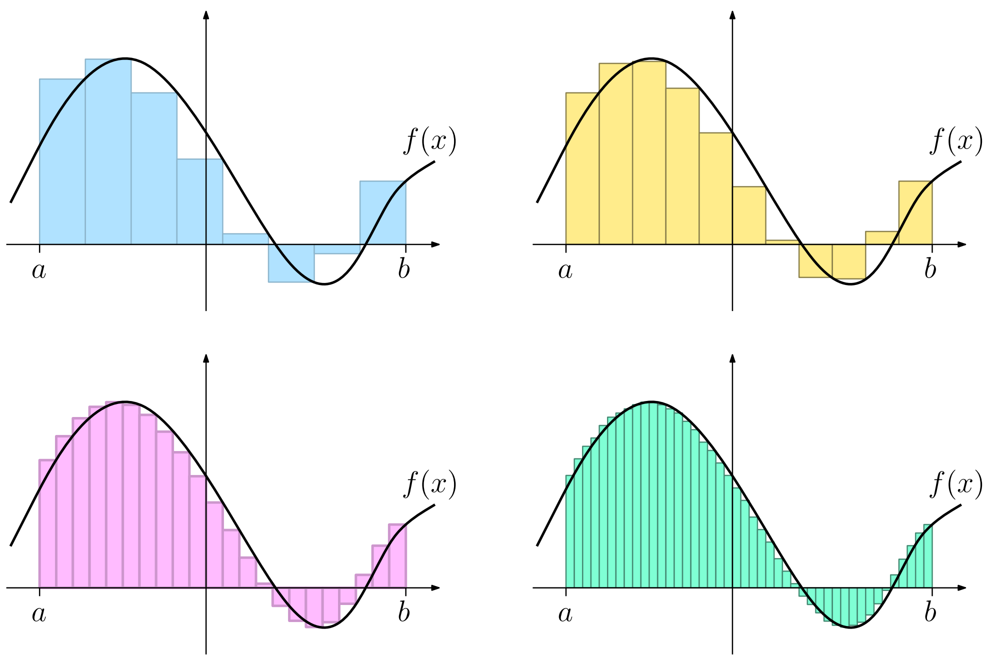
$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Teorema de la funció inversa. Sigui $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funció contínua i injectiva, i sigui $c \in (a,b)$ un punt tal que f és derivable en c i $f'(c) \neq 0$. Aleshores la inversa $g : \operatorname{Im} f \to \mathbb{R}$ de f és derivable en $d = f(c)$ i

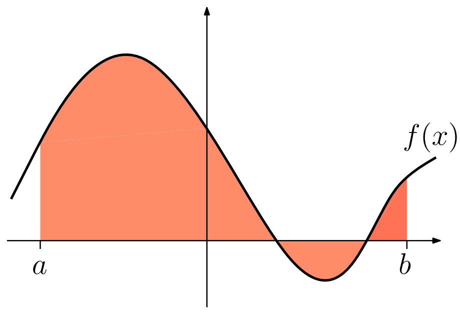
$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}.$$

4.3 Integral d'una funció sobre un interval

La integral d'una funció f definida en un interval $[a,b]$ s'escriu $\int_a^b f(x)dx$ i es defineix com el límit (si existeix), quan n tendeix a infinit, de la suma $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$, on $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$.
La figura següent il·lustra el resultat d'aquesta suma per a diversos valors de n.



La integral d'una funció f sobre un interval $[a,b]$ es pot interpretar geomètricament com l'àrea, afectada de signe, de la porció del pla limitada per l'eix de les abscisses, la funció i les rectes verticals $x=a$ i $x=b$.



Teorema fonamental del càlcul. Si anomenem $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, resulta que $F'(x)=f(x)$.

Propietats de les integrals. Algunes de les propietats de les integrals són anàlogues a les de les derivades, ja que integrar i derivar són, en un cert sentit, operacions inverses. Concretament:

1. $\int_a^b (f\pm g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$;
2. $\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$.

4.4 Taula de derivades/primitives immediates

1. Si $f(x)=x^r$, on $r\in\mathbb{R}$, aleshores $f'(x)=rx^{r-1}$.
2. Si $f(x)=e^x$, aleshores $f'(x)=e^x$.
3. Si $f(x)=\ln x$, aleshores $f'(x)=\frac{1}{x}$.
4. Si $f(x)=\sin x$, aleshores $f'(x)=\cos x$.
5. Si $f(x)=\cos x$, aleshores $f'(x)=-\sin x$.
6. Si $f(x)=\tan x$, aleshores $f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$.
7. Si $f(x)=\arcsin x$, aleshores $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. Si $f(x)=\arccos x$, aleshores $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. Si $f(x)=\arctan x$, aleshores $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.