Curs intensiu de matemàtiques
Exercicis

Vera Sacristán i Jaume Soler

Departament de Matemàtica Aplicada II
Facultat d'Informàtica de Barcelona

Curs 2012-13

Capítol 1

Demostracions

1. Estudieu la relació d'implicació entre les afirmacions següents sobre rectes al pla:

   i) Si dues rectes són perpendiculars, aleshores es tallen.

   ii) Si dues rectes no es tallen, aleshores no poden ser perpendiculars.

   iii) Dues rectes qualssevol o bé es tallen o bé no són perpendiculars.

   iv) Si dues rectes es tallen, aleshores són perpendiculars.

   v) No és cert que si dues rectes es tallen aleshores siguin perpendiculars.

   vi) Existeixen dues rectes que es tallen i no són perpendiculars.

2. Expresseu formalment les afirmacions següents, dins l'univers dels nombres enters:

   i) Hi ha nombres enters parells.

   ii) Cada enter és parell o senar.

   iii) Tots els primers són positius.

   iv) L'únic enter primer parell és el 2.

   v) Només hi ha un enter primer parell.

   vi) No tots els enters són senars.

   vii) No tots els primers són senars.

   viii) Si un enter no és senar, aleshores és parell.

3. Negueu les afirmacions següents, procurant d'entendre el seu sentit:

   i) $\forall x, y \in \mathbb{N}\ x = y^2$.

   ii) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x = y^2$.

   iii) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x \leq y$.

   iv) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z.$.

   v) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ y \leq nx)$.

   vi) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ |x| < \delta \Rightarrow x^2 < \epsilon$.

4. Demostreu que, si n és parell, aleshores $3(n+1)^2$ és senar.

5. És cert que si $n-1$ és múltiple de 3, aleshores n^2-1 també ho és? És cert el recíproc?

6. Demostreu que si $3n+2$ és senar, aleshores n és senar.

7. Demostreu o refuteu les afirmacions següents, fent constar el mètode emprat:

   i) Un enter és senar si, i només si, el seu quadrat és senar.

   ii) La suma de dos enters parells és parell.

   iii) La suma d'un parell i un senar és senar.

   iv) Hi ha dos senars que sumen senar.

   v) El quadrat de qualsevol enter és negatiu.

   vi) Hi ha nombres primers tals que el seu quadrat és parell.

   vii) No hi ha cap enter x tal que x^2+1 sigui negatiu.

   viii) La suma de qualssevol dos nombres primers és primer.

   ix) Existeixen dos primers tals que la seva suma és un nombre primer.

8. Demostreu que la suma de dos nombres racionals és racional.

9. Demostreu que la suma d'un nombre racional i un d'irracional és irracional.

10. Què es pot dir del producte de dos nombres racionals? I del producte de dos nombres irracionals? I del producte d'un nombre racional i un d'irracional?

11. Demostreu que $\max(x,y)+\min(x,y)=x+y$.

12. Demostreu que si n és un nombre natural més gran que 1, aleshores n^2-1 és un nombre compost.

13. Demostreu que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

14. Demostreu que el quadrat d'un nombre enter no divisible per 5 sempre dóna reste 1 o 4 en dividir-lo per 5.

15. Expresseu en forma binòmica els nombres complexos següents:

   i) $\dfrac{1-3i}{2+6i} - 3i(1-i)$.

   ii) $(2+3i)^3(2-3i)^3$.

16. Trobeu els nombres complexos z tals que el nombre complex $(3+7i)z$ és imaginari pur de mòdul 58.

17. Descriviu geomètricament el conjunt dels nombres complexos z que satisfan:

   i) $|z-1|<2$.

   ii) $|z-1+i|<1$.

iii) $z = 1/\overline{z}$.

iv) $2\Im(z) = -3$.

v) $|z - w_1| = |z - w_2|$, on w_1, w_2 són nombre complexos donats.

vi) $|z| = \Re(z) + 1$.

vii) $z + \overline{z} = -3$.

18. Resoleu les equacions següents:

    i) $z^2 - 3z + (3 + i) = 0$.

    ii) $z^2 - (10 - 4i)z + 21 - 20i = 0$.

    iii) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.

19. Considereu l'equació $z^3 - (5 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 1 - 5i = 0$. Trobeu les seves arrels reals. Trobeu les tres arrels.

20. Al pla $\mathbb{C}$, l'origen de coordenades i el punt $5 - 2i$ són vèrtexs adjacents d'un quadrat. Trobeu-ne els altres dos vèrtexs sabent que tenen ordenada positiva. Quina és l'àrea del quadrat?

21. Demostreu que si n és un nombre natural, aleshores n és senar si, i només si, $7n + 4$ és senar.

22. Demostreu o refuteu:

    i) $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor \ \forall x \in \mathbb{R}$.

    ii) $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \ \forall x \in \mathbb{R}$.

    iii) $\lceil \frac{x}{2} \rceil = \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor \ \forall x \in \mathbb{R}$. I si $x \in \mathbb{N}$?

23. Resoleu l'equació $z^2 - (1 + i)z + 10 + 11i = 0$.

Capítol 2

Manipulació algebraica

1. Calculeu:

   i) $\sum_{n=3}^{7} n^2$;

   ii) $\sum_{n=3}^{7} n$;

   iii) $\sum_{n=3}^{7} 3$;

   iv) $\sum_{n=3}^{7} 2^n$;

   v) $\sum_{n=3}^{7} (n-1)$.

2. Calculeu el valor de cadascuna de les sumes següents:

   i) $\sum_{n=0}^{5} n!$;

   ii) $\sum_{n=-2}^{2} n$;

   iii) $\sum_{n=-2}^{2} n^2$;

   iv) $\sum_{n=-2}^{2} n(n+1)$.

3. Calculeu:

   i) $\sum_{1\le i,j\le 3} ij^2$;

   ii) $\sum_{1\le i,j\le 3} j^3$;

   iii) $\sum_{1\le i,j\le 3} n$.

4. Digueu si són certes o no les igualtats següents:

   i) $\sum_{1\le i,j\le 300} ij = \left(\sum_{i=1}^{300} i\right)\left(\sum_{j=1}^{300} j\right)$;

   ii) $\sum_{1\le i,j\le 300} ij = \sum_{i=1}^{300}\left(i\sum_{j=1}^{300} j\right)$;

   iii) $\sum_{n=3}^{100} (3n)^2 = 9\sum_{n=3}^{100} n^2$.

5. Escriviu en forma de sumatori i calculeu

   i) $1 + 4 + 7 + \cdots + 301$;

   ii) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$;

   iii) $3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{10}$;

   iv) $3^2 - 3^3 + 3^4 - 3^5 + \cdots + 3^{10}$.

6. Calculeu el valor de cadascun dels productes següents:

   i) $\displaystyle\prod_{m=1}^{5} 3$;

   ii) $\displaystyle\prod_{m=1}^{5} (m+1)$;

   iii) $\displaystyle\prod_{j=-1}^{4} (j+1)$;

   iv) $\displaystyle\prod_{m=1}^{5} j^2$;

   v) $\displaystyle\prod_{m=1}^{5} 2^j$;

   vi) $\displaystyle\prod_{m=1}^{5} j!$.

7. Ordeneu de forma creixent els nombres enters següents: $100!$, 100^{100}, 2^{100}, $(50!)^2$.

8. Escriviu com a unió d'intervals de la recta real els conjunts següents:

   i) $\{x \mid x^2 < 4\}$;

   ii) $\{x \mid |x|/2 \leq 4\}$;

   iii) $\{x \mid x^2 - 2 \geq 3\}$;

   iv) $\{x \mid |x - 2| < 1/4\}$;

   v) $\{x \mid \sqrt{x-2} > 1/2\}$;

   vi) $\{x \mid |x + 1| = 3\}$.

9. Ordeneu, de més petit a més gran, els nombres següents: x, x^2, $1/x$, $\sqrt{x}$, on $x \in \mathbb{R}^+$. Què canvia si $x < 0$?

10. Siguin a i b nombres reals amb $a < b$. Demostreu que $a < (a+b)/2 < b$ i que, si a i b són racionals, aleshores $(a+b)/2$ és racional.

11. Siguin a, b i x nombres reals amb $0 < a < b$. Ordeneu de més petit a més gran:
$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a+x}{b+x}, \quad \frac{a+2x}{b+2x}.$$

12. Siguin a i b nombres reals. Demostreu:

    i) $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$;

    ii) $\min\{a, b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

Capítol 3

Funcions elementals

1. Calculeu els valors de: 2^{3^2}; -2^{3^2}; $(-2)^{3^2}$; $((-2)^3)^3$; $((-2)^2)^3$; $(-2^2)^3$.

2. Prenem un nombre N, calculem la seva arrel quadrada i del resultat obtingut calculem l'arrel cúbica. Quina relació té el nombre obtingut amb l'original N?

3. Expresseu mitjançant un sol radical: $\sqrt{5}\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{5\sqrt[3]{5}}$; $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$.

4. Trobeu el valor exacte dels logaritmes següents: $\log_2 512$; $\log_3 1/9$; $\log_{10} 0.01$; $\log_{1/2} 4$; $\log_{128} 2$; $\log_{32} 0.25$.

5. Utilitzant el teorema de Bolzano i increments d'una unitat en els dígits decimals, calculeu $\sqrt[5]{25}$ amb dos decimals exactes i expresseu el resultat en forma de logaritme.

6. Demostreu que $\log_a b = 1/\log_b a$.

7. Demostreu que $(\log_c b)(\log_b a) = \log_c a$ (regla del dòmino).

8. Trobeu una expressió per a $\log_3 7$ que només utilitzi logaritmes decimals.

9. Podríem donar sentit a $c = \sqrt[5.1]{32.7}$? En cas afirmatiu expliqueu com ho faríeu per calcular-ho amb dos decimals exactes (utilitzant el teorema de Bolzano i increments d'una unitat en els dígits decimals) sense fer servir res més que les quatre operacions elementals. Trobeu una expressió per a c que faci servir les constants 5.1, 32.7 i els seus logaritmes decimals.

10. Calculeu el nombre de dígits decimals de 23587^{457}.

11. Expliqueu raonadament perquè és convenient definir $a^{-3} = 1/a^3$ i $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$ i no pas $a^{1/3} = 1/a^3$ i $a^{-3} = \sqrt[3]{a}$ (de fet, aquestes darreres definicions podrien semblar més lògiques: donat que -3 és "el contrari" de 3, i que la radicació és "el contrari" de l'exponenciació, podria semblar raonable definir $a^{-3} = \sqrt[3]{a}$, etc.)

12. Sense utilitzar la calculadora digueu si les parelles de nombres següents són iguals, iguals en valor absolut però de signe contrari o cap de les dues coses:

i) $\sin 30°$, $\cos 60°$.

ii) $\sin 150°$, $\cos 60°$.

iii) $\sin 210°$, $\cos 60°$.

iv) $\sin 30°$, $\cos 210°$.

v) $\cos 240°$, $\cos 150°$.

vi) $\cos 300°$, $\cos 120°$.

vii) $\sin 210°$, $\cos 120°$.

viii) $\sin \pi/6$, $\sin 7\pi/6$.

ix) $\sin \pi/6$, $\sin 2\pi/3$.

x) $\sin 5\pi/6$, $\cos 11\pi/6$.

xi) $\sin 5\pi/3$, $\cos 7\pi/6$.

xii) $\sin \pi/3$, $\cos 5\pi/6$.

xiii) $\sin 2\pi/3$, $\cos 7\pi/6$.

xiv) $\sin \pi/3$, $\sin 7\pi/6$.

13. Utilitzant les fórmules d'addició de les funcions trigonomètriques, trobeu expressions per a $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$ en funció de $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

14. A partir del resultat anterior, expresseu $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ en funció de $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$.

15. Utilitzant el teorema de Pitàgores i les propietats elementals dels angles d'un quadrat i d'un triangle equilàter, calculeu sinus, cosinus i tangent dels angles de $\pi/6$, $\pi/4$ i $\pi/3$.

16. Trobeu expressions exactes per al sinus i cosinus d'un angle de 15°.

17. Utilitzant el teorema de Pitàgores demostreu que en un triangle qualsevol (no necessàriament rectangle) de costats a, b i c sempre es compleix $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, on α és l'angle oposat al costat a.

18. Trobeu expressions exactes per al sinus i el cosinus d'un angle de 75°.

19. Demostreu les fórmules d'addició del sinus i del cosinus.

Capítol 4

Càlcul

1. Justifiqueu que l'equació $2x = \cos x$ té una solució i calculeu-la amb una aproximació de dues xifres decimals. Justifiqueu també que aquesta equació no té cap altra solució.

2. Justifiqueu que l'equació $x = 10 \sin x$ té només un nombre finit de solucions.

3. Justifiqueu que qualsevol polinomi de grau 5 té com a mínim una arrel real. Indicació: podem suposar que el polinomi és de la forma $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. L'argument intuïtiu és que si x és molt gran en valor absolut, el terme x^5 és més gran que la resta del polinomi. Sigui $M = \max\{|a_4|, |a_3|, |a_2|, |a_1|, |a_0|, 1\}$ i prenem $\alpha = 10M$, $\beta = -10M$. Raoneu rigorosament que $P(\alpha) > 0$ i $P(\beta) < 0$ comparant els valors absoluts de x^5 i de $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

4. Doneu un argument que justifiqui que qualsevol polinomi de grau senar té com a mínim una arrel real.

5. Demostreu que per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$ el polinomi $P(x) = x^5 + x + a$ té una única arrel real.

6. Demostreu que el polinomi $P(x) = x^5 - x + 10$ té una única arrel real.

7. Calculeu les derivades de les funcions següents:

   i) $x \ln x$,
   ii) $x \sin x \cos x$,
   iii) $\sin^2 x$,
   iv) $\sin x^2$,
   v) $(\ln x)^2$,
   vi) $\ln(\ln x)$,
   vii) $\sin^2 x^2$,
   viii) $\sqrt{1+x^4}$,
   ix) x^x,
   x) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$,
   xi) $\sqrt{1+\sin^2(5x^3)}$.

8. Calculeu una primitiva de cadascuna de les funcions següents:

i) $\sin 3x$,

ii) $x(x^2+1)^{50}$,

iii) $x(x+1)^3$,

iv) $\tan x$,

v) $\frac{1}{x\ln x}$,

vi) e^{5x},

vii) e^{-2x},

viii) $\tan^2 x$,

ix) $\frac{1}{1+4x^2}$,

x) $\frac{1}{4+x^2}$,

xi) $\sin^2 x$,

xii) $\sqrt{1+5x}$,

xiii) $\sqrt[3]{1+5x}$,

xiv) $\frac{1}{\sqrt{1+5x}}$,

xv) $\frac{x}{1+3x^2}$,

xvi) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

xvii) $\sin x\cos x$,

xviii) $\sin x\cos^3 x$.

9. Utilitzant la definició, demostreu que si $f(x) = 1/x$, aleshores $f'(x) = -1/x^2$.

10. Utilitzant la definició, demostreu que si $f(x) = x^3$, aleshores $f'(x) = 3x^2$.

11. Utilitzant la definició, demostreu que si $f(x) = \sqrt{x}$, aleshores $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

12. Calculeu els límits següents:

    i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ (n fixat).

    ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$.

    iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x$.

    iv) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon}$, $\epsilon > 0$.

13. Demostreu que l'equació $ax + b = e^x$ no pot tenir més de dues solucions reals diferents (indicació: suposeu que existeixen tres arrels diferents i apliqueu el teorema de Rolle). Trobeu valors d'a i b per als quals l'equació donada té exactament cap, una i dues solucions.