Ejercicio 8.37

a) ¿Cuál es el rango de un sistema compatible determinado con 5 ecuaciones y 4 incógnitas? ¿Y si el sistema es indeterminado?

b) ¿Cuántas ecuaciones son necesarias (como mínimo) para tener un sistema indeterminado con 2 grados de libertad y rango 3? ¿Cuántas incógnitas tendrá el sistema?

c) ¿Puede ser compatible determinado un sistema con 7 ecuaciones y 10 incógnitas?

d) Invente un sistema compatible determinado, otro indeterminado y un tercero incompatible, todos ellos con 3 incógnitas y 4 ecuaciones.

Ejercicio 8.38, apartado a

Estudie, según los valores del parámetro, el sistema siguiente: $\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my+z=m \\ mx+y+z=m \end{cases}$

Ejercicio 8.45

Demuestre que

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1}(a+n-1).$$

Ejercicio 8.46

Los estudios de poblaciones animales incluyen la investigación de la distribución de los individuos según su edad. Suponiendo que la unidad de tiempo utilizada sean los años, dicha distribución se puede representar mediante el vector $n_t = (n_{0t}, n_{1t}, n_{2t}, \dots, n_{kt})$, donde n_{it} es el número de individuos que tienen i años de edad en el momento t. Conocido el valor de n_t, el valor de n_{t+1} se puede obtener a partir de n_t multiplicando n_t por una matriz M que recoge la información sobre las tasas de fertilidad y de supervivencia. Concretamente, simplificando un poco el procedimiento por la vía de limitarlo a las hembras de la población:

a) si $n_{i,t}$ es el número de hembras con edades comprendidas entre i y $i+1$ en el instante t,

b) p_i es la probabilidad de que una hembra de edad i en el momento t sobreviva hasta el momento $t+1$,

c) f_i es el número de hijas vivas en el momento $t+1$, de entre las nacidas entre el instante t y el $t+1$, de las hembras de edad i en el instante t, entonces

$$n_{0,t+1} = f_0 n_{0,t} + f_1 n_{1,t} + \cdots + f_k n_{k,t}$$
$$n_{i,t+1} = p_{i-1} n_{i-1,t}$$

es decir,

$$n_{t+1} = \begin{pmatrix} n_{0,t+1} \\ n_{1,t+1} \\ n_{2,t+1} \\ \vdots \\ n_{k,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{0,t} \\ n_{1,t} \\ n_{2,t} \\ \vdots \\ n_{k,t} \end{pmatrix} = M n_t.$$

Supongamos ahora que los escarabajos de una cierta variedad viven sólo tres años y se reproducen durante su tercer año de vida. La tasa de supervivencia del primer año de vida es $1/2$, el del segundo año es $1/3$ y supongamos que cada hembra del grupo de edad comprendida entre los 2 y los 3 años genera, de media, 6 nuevas hembras vivas.

a) Calcule la matriz M de fertilidad y supervivencia de esta variedad de escarabajos.

b) Demuestre que M tiene el vector propio $(6, 3, 1)$ de valor propio 1.

c) Demuestre que cuando una población de esta variedad de escarabajos empieza con una distribución por edades en la proporción $6 : 3 : 1$, entonces se mantiene por siempre con esta proporción.

Ejercicio 9.56

Diagonalice la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y deduzca el valor de $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

Ejercicio 9.59

Diga par qué valores de a y b la matriz A es diagonalizable y, en los casos en que lo sea, encuentre una matriz invertible M tal que $M^{-1}AM$ sea diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 12.71

Halle la descomposición singular de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.