Master en Estadística e Investigación Operativa

Matemáticas

Análisis matemático (Capítulo 15)

Vera Sacristán

Departament de Matemàtiques
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

Índice

15. Sumas de infinitos sumandos

Un pastel se divide en dos mitades. Una de las mitades, a su vez, se divide en dos mitades. De los cuartos resultantes, uno se divide en dos mitades. De los dos octavos resultantes, uno se divide en dos mitades. Y así sucesivamente.

Este proceso se puede ir repitiendo indefinidamente (desde un punto de vista teórico), concluyéndose que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1,$$

es decir, el resultado de sumar infinitos términos puede ser un número finito. Este capítulo se dedica íntegramente al estudio de las sumas de una cantidad infinita de sumandos, tanto si se trata de una cantidad infinita numerable (caso discreto, suma de una serie) como si se trata de una cantidad infinita continua (caso continuo, cálculo de una integral).

15.1. El caso discreto: sumar series

15.1.1. Series numéricas

El caso más básico de suma de series es el de las series numéricas, que extienden el concepto de suma a un conjunto infinito numerable de números reales.

15.1.1.1 Definición

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. La suma (finita) de los primeros términos de la sucesión, $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, se denomina *suma parcial n-ésima* de la serie asociada a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mientras que a_n se denomina *término n-ésimo* de la serie.

Se dice que la serie es *convergente* (o *sumable*) si la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite finito y, en tal caso, el límite de la sucesión de las sumas parciales se llama *suma de la serie*. En caso contrario, se dice que la serie *diverge*.

En cualquiera de los dos casos, la serie se denota

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{o también} \qquad \sum_{n\geq 0} a_n.$$

Desgraciadamente, esta notación denota tanto la serie como su suma, cuando existe. Sin embargo, los dos conceptos no deben confundirse.

15.1.1.2 Ejemplo: la serie geométrica

La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n$ converge si, y sólo si, $|r|<1$, y en tal caso su suma es $\frac{1}{1-r}$.

15.1.1.3 Propiedades de las series convergentes y su suma

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ es convergente si, y sólo si, $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$ es convergente.

En este caso, $\sum\limits_{n\geq 0} a_n = a_0 + \ldots + a_{n_0-1} + \sum\limits_{n\geq n_0} a_n$.

b) Si $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim a_n = 0$. El recíproco no es cierto.

c) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas convergentes, entonces $\sum(a_n + b_n)$ es convergente y $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

d) Si $\sum a_n$ es convergente y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\sum ca_n$ es convergente y $\sum ca_n = c\sum a_n$.

15.1.1.4 Propiedades de las series de términos positivos

Una serie $\sum a_n$ se considera de términos positivos si $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $a_n, b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se dan las propiedades siguientes:

a) La serie $\sum a_n$ es convergente si, y sólo si, la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

b) Si $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$, entonces:

- $\sum b_n$ es convergente $\Longrightarrow \sum a_n$ es convergente.
- $\sum a_n$ es divergente $\Longrightarrow \sum b_n$ es divergente.

c) Si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, entonces:

- Si $l \in \mathbb{R}$ y $l \neq 0$, entonces: $\sum a_n$ es convergente $\Longleftrightarrow \sum b_n$ es convergente.
- Si $l = 0$, entonces: $\sum b_n$ es convergente $\Longrightarrow \sum a_n$ es convergente.
- Si $l = \infty$, entonces: $\sum a_n$ es convergente $\Longrightarrow \sum b_n$ es convergente.

15.1.1.5 Ejemplo: la serie armónica

La serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ es divergente.

15.1.1.6 Propiedades de las series alternadas

Se denominan *alternadas* las series $\sum(-1)^n a_n$ y $\sum(-1)^{n+1} a_n$, con $a_n \geq 0$.

La propiedad más destacada de las series alternadas es la siguiente:

a) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que tiende a zero, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.

Además, en tal caso la diferencia entre la suma de la serie y cualquiera de sus sumas parciales se puede acotar así:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n \right| \leq a_{N+1}.$$

La demostración de este resultado comienza observando que la subsucesión de las sumas parciales pares es decreciente: $s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2}$. Además, está acotada inferiormente y es de términos positivos: $s_{2n} = a_0 - a_1 + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geq a_0 - a_1$. Por lo tanto, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite s. La subsucesión de las sumas parciales impares cumple que $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, de manera que también es convergente y de mismo límite: $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} - \lim a_{2n+1} = s + 0 = s$. En cuanto a la diferencia entre la suma y las sumas parciales,

$$\begin{aligned} |s - s_n| &= |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) \ldots| \\ &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) \ldots \\ &= a_{n+1} + (-a_{n+2} + a_{n+3}) + (-a_{n+4} + a_{n+5}) + \ldots \\ &\leq a_{n+1}. \end{aligned}$$

15.1.1.7 Ejemplo: aproximación de la suma de la serie armónica alternada

Aplicando la propiedad anterior, es fácil comprobar que la serie $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ es convergente y que, para aproximar el valor de su suma con un decimal de precisión, hay que sumar al menos 10 términos de la serie.

15.1.1.8 Convergencia absoluta y convergencia condicional

Se dice que una serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie de sus valores absolutos, $\sum |a_n|$, es convergente.

Toda serie absolutamente convergente es convergente. Esto se demuestra considerando, para cada suma parcial s_n de la serie, la suma s_n^+ de sus términos positivos y la suma s_n^- de los valores absolutos de sus términos negativos, y demostrando que ambas son convergentes.

El recíproco no es cierto: tal como demuestra la serie armónica alternada, no toda serie convergente es absolutamente convergente.

Cuando una serie es convergente pero no es absolutamente convergente, se dice que es *condicionalmente convergente*. Esta terminología se debe a la propiedad siguiente:

a) Si $\sum a_n$ es una serie absolutamente convergente, entonces toda reordenación $\sum b_n = \sum a_{\sigma(n)}$ de $\sum a_n$ es (absolutamente) convergente y $\sum b_n = \sum a_n$.

b) Si $\sum a_n$ es una serie condicionalmente convergente, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$ existe una reordenación $\sum b_n = \sum a_{\sigma(n)}$ de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n = c$.

La demostración de estas afirmaciones es un poco enrevesada, pero no es más que un ejercicio técnico.

Este resultado indica que la propiedad conmutativa de la suma (finita) de números reales no se extiende a las sumas infinitas, excepto si la convergencia es absoluta.

En cambio, la propiedad asociativa se extiende sin problemas a todas las series convergentes:

a) Si $\sum a_n$ es convergente, entonces cualquier serie $\sum b_n$ obtenida agrupando términos (consecutivos) de $\sum a_n$ es convergente, y $\sum b_n = \sum a_n$.

15.1.2. Series de potencias

Las series de potencias son la generalización del concepto de polinomio (suma finita de monomios) al caso de la suma infinita numerable de monomios.

15.1.2.1 Definición

Una *serie de potencias centrada en el origen* es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Una *serie de potencias centrada en el punto* a es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

15.1.2.2 Ejemplo

Un resultado anterior indica que la serie de potencias $\sum x^n$ es absolutamente convergente para $|x| < 1$, y es divergente para $|x| > 1$, para $x = 1$ y para $x = -1$.

15.1.2.3 Radio e intervalo de convergencia

Se define el *radio de convergencia* R de una serie de potencias $\sum a_n x^n$ de la manera siguiente:

- Si $\sum a_n x^n$ sólo converge para $x = 0$, entonces $R = 0$.
- Si $\sum a_n x^n$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces $R = +\infty$.
- En el resto de casos, $R = \sup\{|x| \mid \sum a_n x^n \text{ es convergente}\}$.

El intervalo $(-R, R)$ se conoce como *intervalo de convergencia* de la serie.

La propiedad siguiente de las series de potencias es fundamental para entender qué significa el intervalo de convergencia de una serie:

a) Si $\sum a_n x^n$ es convergente para $x = x_0$, entonces es absolutamente convergente para todo x tal que $|x| < |x_0|$.

b) Si $\sum a_n x^n$ es divergente para $x = x_1$, entonces es divergente para todo x tal que $|x| > |x_1|$.

La demostración de esta propiedad es como sigue. Si $\sum a_n x_0^n$ es convergente, entonces $\lim a_n x_0^n = 0$ y, por lo tanto, la sucesión $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Sea, pues, M tal que $|a_n x_0^n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Escribimos $|a_n x^n| = |a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}| = |a_n x_0^n||\frac{x}{x_0}|^n \leq M|\frac{x}{x_0}|^n$. Puesto que $|x| < |x_0|$, resulta $|\frac{x}{x_0}| < 1$ y la serie de potencias $\sum M|\frac{x}{x_0}|^n$ es convergente, es decir, $\sum |a_n x^n|$ es convergente.

De la propiedad anterior se deduce el resultado siguiente:

Si R es el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum a_n x^n$, entonces la serie es absolutamente convergente $\forall x \in (-R, R)$ y es divergente $\forall x$ tal que $|x| > R$. (El comportamiento de la serie en los puntos $x = R$ y $x = -R$ puede variar en cada caso: no lo rige una regla general).

15.1.2.4 Propiedades de les series de potencias

Consideremos $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ como la función definida en $(-R, R)$ por una serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$. Entonces f tiene las propiedades siguientes:

a) **Continuidad.** La función $f(x)$ es continua en $(-R, R)$.

b) **Derivabilidad.** La función $f(x)$ es infinitamente derivable en $(-R, R)$.

c) **Expresión de las derivadas.** La derivada de f también es una serie de potencias:
$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} a_n n x^{n-1} \quad \forall x \in (-R, R).$$
y les derivadas sucesivas también lo son:
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} \quad \forall x \in (-R, R).$$

d) **Expresión de los coeficientes.** Los coeficientes de la serie están unívocamente determinados:
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

15.1.2.5 Series de Taylor

Si f es infinitamente diferenciable en x_0, la *serie de Taylor* de f en x_0 es
$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$
Observe que se trata de la generalización del polinomio de Taylor.

Teorema de Taylor. Si f es infinitamente diferenciable en x_0 y el residuo de Taylor de f en x_0 tiende a cero, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, entonces $f(x)$ coincide con su serie de Taylor:
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

15.1.2.6 Ejemplo

La función exponencial se puede desarrollar en serie de Taylor:
$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

15.1.3. Ejercicios

Exercici 15.1 Diga si las series siguientes son convergentes o divergentes:

a) $\sum \frac{1}{n^n}$

b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\sum \frac{3\sqrt{3n-5}}{\sqrt{7n^3-9n+6}}$

d) $\sum \frac{\ln n}{n}$

e) $\sum \frac{1}{2n-1}$

Exercici 15.2 Demuestre que la suma de las series siguientes es la que se indica:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

Exercici 15.3 Acote el error que se produce al substituir la suma de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ por la suma de los n primeros términos. En particular, calcule dicho error para $n = 10$.

Exercici 15.4 Desarrolle las funciones siguientes en serie de Taylor centrada en el punto indicado:

a) $f(x) = a^x$ en el punto 0.

b) $f(x) = \ln(1+x)$ en el punto 0.

c) $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ en el punto 0. ¿Qué relación guardan estos desarrollos con el de la función $h(x) = e^x$?

d) $f(x) = \ln(1-x)$ en el punto 0.

e) $f(x) = e^x$ en el punto 1.

15.2. El caso continuo: integrales

15.2.1. Integrales propias

15.2.1.1 Objetivo y definición

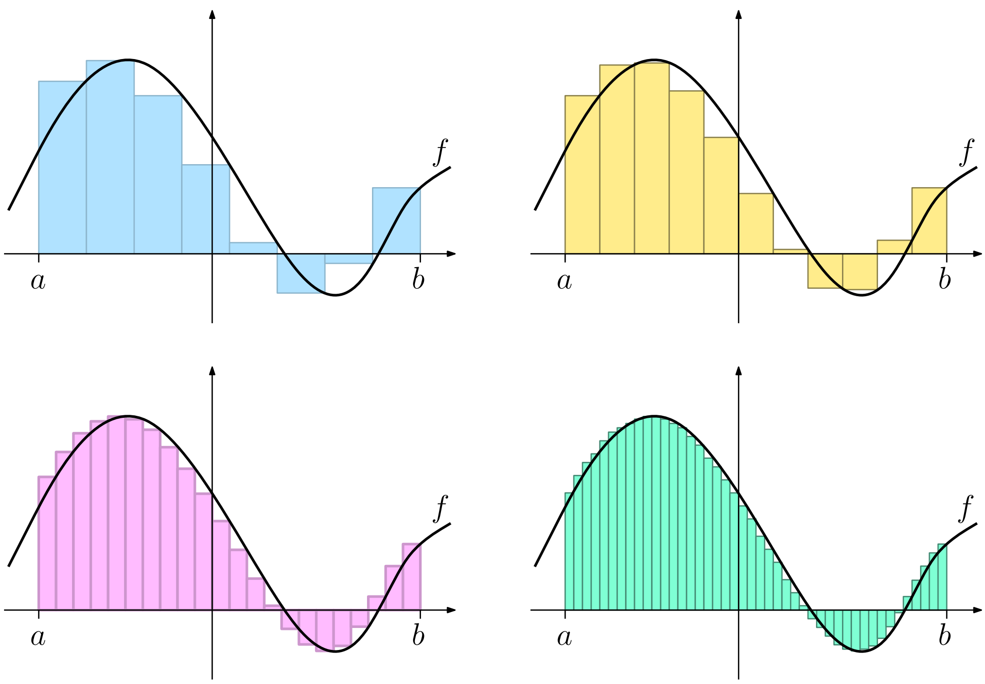
Las integrales no son más que el caso continuo de las sumas infinitas. Aquí ya no se trata de sumar una cantidad numerable de valores, sino de sumar una cantidad continua de ellos.

Dada una función f definida y acotada en un intervalo cerrado i acotado $[a, b]$, su integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pretende ser la suma de los valores $f(x)$ para todos los (infinitos) valores posibles de $x \in [a, b]$.

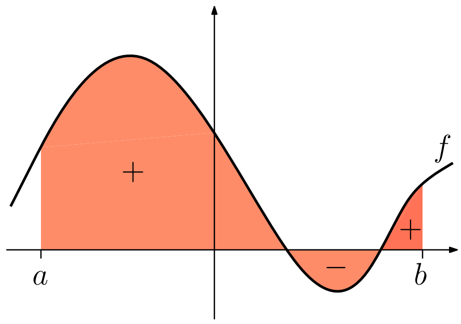
La integral de una función f definida en un intervalo $[a, b]$ se escribe $\int_a^b f(x)\,dx$ y se define como el límite cuando n tiende a infinito, si existe, de la suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, donde $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ y t_i es cualquier número en $[x_{i-1}, x_i]$.
Observe la etimología de la notación:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\,\Delta x.$$

La figura siguiente ilustra el resultado de esta suma para diversos valores de n al tomar como t_i el extremo derecho de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



La integral de una función f sobre un intervalo $[a, b]$ se puede interpretar geométricamente como el área, afectada de signo, de la porción del plano limitada por el eje de las abscisas, la función y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



15.2.1.2 Otras definiciones de la integral

Existen diversas maneras de definir este mismo concepto. La que hemos presentado en el apartado anterior se conoce como definición por sumas de Riemann. También se suele definir la integral por sumas inferiores y superiores, esto es, sumas en las que en vez de usar un valor $f(t_i)$ con $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ escogido arbitrariamente, se toma t_i tal que $f(t_i) = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ o $f(t_i) = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, y entonces se dice que f es integrable si el supremo de las sumas inferiores (tomado sobre todas les particiones posibles del intervalo $[a, b]$) y el ínfimo de las sumas superiores coinciden. Otras definiciones del concepto de integral (por ejemplo, la definición de Lebesgue) se basan en conceptos distintos, pero su objetivo es siempre el mismo.

15.2.1.3 Ejemplos

a) Toda función constante $f(x) = k$ es integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ ya que, para toda partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ se tiene $\sum_{i=0}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k(x_n - x_0) = k(b - a)$.

b) $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ para cualquier intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ ya que, tomando una partición equidistribuida, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} (x_1 + x_n) \frac{n}{2} \frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{b-a}{n} + b \right) \frac{b-a}{2} = (a+b)\frac{b-a}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.
\end{aligned}$$

15.2.1.4 Teorema fundamental del cálculo

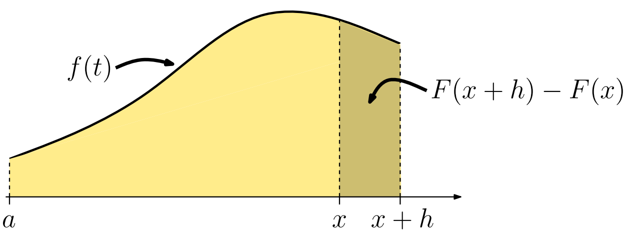
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$. Podemos definir la *función integral* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, la cual resulta ser continua. Si, además, f era continua, entonces F es derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. En otras palabras,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Por otro lado, si existe $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G' = f$, entonces

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

La primera de estas dos afirmaciones no es difícil de demostrar formalmente, pero es incluso más interesante pensarla geométricamente. Observe la figura siguiente, teniendo en cuenta que $F'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$:



La segunda se deduce de la primera, como sigue. Dado que $G' = f$ i $F' = f$, las funciones G y F sólo difieren en una constante, $F(x) = G(x) + k$. Dicha constante k se puede calcular evaluando F y G en un punto conocido. Concretamente, sabemos que $0 = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) = G(a) + k$, de donde se deduce que $k = -G(a)$. Por lo tanto, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) + k = G(b) - G(a)$.

15.2.1.5 Propiedades de las integrales

Algunas de les propiedades de las integrales son análogas a les de las derivadas ya que, como hemos visto, integrar y derivar son, en cierto sentido, operaciones inversas. Concretamente:

a) Si f es integrable en $[a, b]$ y $c \in (a, b)$, entonces f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_v^b f(x)\,dx.$$

b) Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

c) Si f es integrable en $[a, b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λf es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

d) Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces fg es integrable en $[a, b]$.

e) Si $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ es integrable y $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $g \circ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

f) Si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

g) Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

h) Si f es integrable en $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

15.2.1.6 Tabla de derivadas/primitivas immediatas

a) Si $f(x) = x^r$, on $r \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = rx^{r-1}$.

b) Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.

c) Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$.

d) Si $f(x) = \sin x$, entonces $f'(x) = \cos x$.

e) Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\sin x$.

f) Si $f(x) = \tan x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

g) Si $f(x) = \arcsin x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

h) Si $f(x) = \arccos x$, entonces $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

i) Si $f(x) = \arctan x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

15.2.1.7 Otros teoremas sobre integración de funciones

Es útil saber que determinadas funciones son integrables, aunque no siempre sea fácil calcular su integral sobre un determinado intervalo. En particular:

- Toda función monótona en un intervalo cerrado y acotado es integrable en dicho intervalo.
- Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es integrable en dicho intervalo.

A veces, también pueden ser útiles otras propiedades, como las siguientes.

Teorema del valor intermedio para integrales. Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe algún $t \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(t)$.

Teorema de integración por partes. Si f y g son derivables en $[a,b]$ y f' y g' son integrables en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

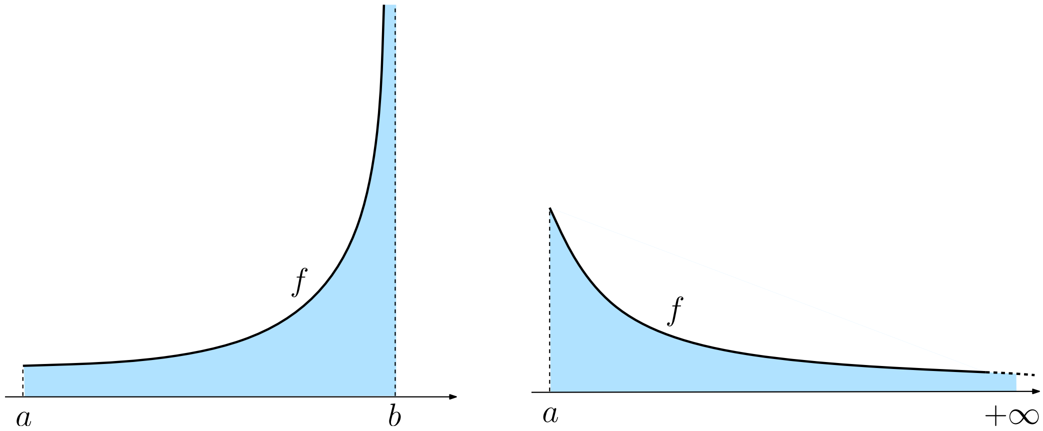
Teorema de integración por cambio de variable. Si f es continua en $[a,b]$ y $u:[c,d]\longrightarrow[a,b]$ es integrable en $[c,d]$ y tal que $u(c)=a$ y $u(d)=b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f(u(t))u'(t)\,dt.$$

15.2.2. Integrales impropias

15.2.2.1 Objetivo

Al hablar de la integrabilidad de una función hemos requerido hasta aquí que sea acotada y nos hemos restringido a intervalos cerrados y acotados. Las integrales impropias extienden el concepto de integral relajando estas dos condiciones. Pero ¿tiene sentido hablar del área delimitada por una función no acotada o en un intervalo no acotado? ¿puede dicha área tomar un valor finito?



La respuesta a ambas preguntas es afirmativa. Esto puede resultar sorprendente a primera vista, pero no lo es tanto si recordamos que también en el caso discreto las sumas infinitas tienen sentido y pueden dar resultados finitos.

15.2.2.2 Definiciones

Si f es una función no acotada en $[a,b]$, pero es integrable en $[a,c]$ para todo $c\in[a,b)$, entonces tiene sentido preguntarnos si existe el límite de las integrales $\int_a^c f$ cuando c tiende a b por la izquierda y, en caso de que exista y sea un número real, decir que la integral $\int_a^b f$ es convergente y que

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$

Una definición análoga vale para el extremo a del intervalo de definición de f.

Asimismo, si f es una función integrable en $[a,b]$ para todo $b\geq a$, tiene sentido preguntarnos si existe el límite de las integrales $\int_a^b f$ cuando b tiende a $+\infty$ y, si existe y es un número real, decir que la integral $\int_a^{+\infty} f$ es convergente y que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Una definición análoga vale para $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$. Finalmente, se dice que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si lo hacen $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ para un valor arbitrario de a.

Observe que una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ no es más que la integral $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ en la que la función f es escalonada y está definida así: $f(x) = a_n$ para todo $x \in [n, n+1)$.

15.2.2.3 Propiedades de las integrales impropias

Determinar si una integral impropia converge no es tarea fácil a partir de las definiciones. Por este motivo se suelen utilizar propiedades. Las primeras y más obvias son las que se derivan de forma inmediata de las propiedades de las integrales propias descritas en el apartado 15.2.1.5, ya que las impropias no son más que limites de éstas. Pero hay algunas propiedades más que son bastante intuitivas y que, además, mantienen un gran paralelismo con propiedades análogas para series. Son las siguientes:

a) Si f es una función positiva (es decir, $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$) y existe $\int_a^b f(x)dx$ para todo $b \geq a$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge } \Longleftrightarrow \exists M\ \forall b \geq a\ \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

b) Si $f \leq g$ son dos funciones positivas (es decir, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$) y existe $\int_a^b f(x)\,dx$ para todo $b \geq a$, entonces

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

Además,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

c) Si f i g son dos funciones positivas y $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R} - \{0\}$, y existen $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ para todo $b \geq a$, entonces

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge } \Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

Además, si $c = 0$ vale la implicación $\Longrightarrow$ y, si $c = +\infty$ vale la recíproca, $\Longleftarrow$.

Como es natural, propiedades análogas existen para las integrales impropias de tipo $\int_{-\infty}^{b}$, y también para las integrales impropias de funciones no acotadas sobre intervalos cerrados y acotados.

15.2.3. Ejercicios

Exercici 15.5 Para cada una de las funciones f siguientes, diga cuál es la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dibuje esquemáticamente las gráficas de f y de F en cada caso:

a) $f(x) = c, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x \neq b; \\ c+1, & \text{si } x = b. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x < b; \\ c+1, & \text{si } x \geq b. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x \leq b; \\ -c-1, & \text{si } x > b. \end{cases}$

e) $f(x) = |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}; \ \ a = 0$.

f) $f(x) = \lfloor x \rfloor, \ \forall x \in \mathbb{R}; \ \ a = 0$.

Exercici 15.6 Calcule

$$\int_{-3}^{3} |x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x| \, dx.$$

Exercici 15.7 Escriba con precisión el enunciado de las propiedades de las integrales impropias que se deducen de las propiedades de las integrales propias descritas en el apartado 15.2.1.5, y explique su porqué.

Exercici 15.8 Diga si la integral siguiente converge:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Exercici 15.9 Calcule:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Bibliografía

- André I. Khuri, Advanced Calculus with Applications in Statistics, Wiley, 1993.

  Se trata de un libro de texto de análisis matemático pensado para estudiantes de estadística. Incluye todos los temas expuestos en esta parte de la asignatura y muchos más. Contiene algunos ejemplos que provienen del campo de la estadística, así como dos capítulos específicamente dedicados a aplicaciones estadísticas.