Màster en Estadística i Investigació Operativa

Matemàtiques

Anàlisi matemàtica

Vera Sacristán

Departament de Matemàtica Aplicada II
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

11 Mètrica i topologia

11.1 Mètrica

11.1.1 Espai euclidià

L'*espai euclidià* n-dimensional és $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Els elements de $\mathbb{R}^n$ s'anomenen punts. Les components x_i coordenades, i el punt $0 = (0, \dots, 0)$ origen. En moltes ocasions, els punts x s'identifiquen amb els seus vectors posició.

11.1.2 Producte escalar

El *producte escalar* a $\mathbb{R}^n$ és l'operació:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & < x, y >= x \cdot y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

El producte escalar és una forma bilineal simètrica definida positiva, és a dir, satisfà les propietats següents:

a) $< x, x > \geq 0$,
   $< x, x >= 0$ si, i només si, $x = 0$.

b) $< x, y >=< y, x >$.

c) $< ax + by, z >= a < x, z > +b < y, z >$.

11.1.3 Norma

La *norma* euclidiana a $\mathbb{R}^n$ és la funció:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{< x, x >} = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \end{array}$$

La norma euclidiana satisfà les propietats següents:

a) $\|x\| \geq 0$,
   $\|x\| = 0$ si, i només si, $x = 0$.

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualtat triangular).

Existeixen altres funcions que també són normes sobre $\mathbb{R}^n$, en el sentit que satisfan aquestes mateixes tres propietats, com ara:

- La norma de Manhattan: $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
- La norma del màxim: $\|x\| = \max_{i=1\dots n} |x_i|$.

11.1.4 Distància

La *distància* euclidiana a $\mathbb{R}^n$ és la funció:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & d(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

La distància euclidiana satisfà les propietats següents:

a) $d(x,y) \geq 0$,
   $d(x,y) = 0$ si, i només si, $x = y$.

b) $d(x,y) = d(y,x)$.

c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Existeixen altres funcions que també són distàncies sobre $\mathbb{R}^n$, en el sentit que satisfan aquestes mateixes tres propietats.

11.1.5 Un parell de propietats

D'entre les moltes propietats i relacions entre aquestes tres nocions, destaca la *desigualtat de Cauchy-Schwarz*, per les seves aplicacions: $|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$. La igualtat es dóna si, i només si, els vectors x i y són linealment dependents.

Una interpretació possible del producte escalar ve donada per la igualtat $x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos\theta$, on θ és l'angle que formen els vectors posició dels punts x i y. Com a conseqüència, els dos vectors són ortogonals si, i només si, $x \cdot y = 0$.

11.2 Topologia

11.2.1 Boles i entorns

La *bola oberta* de centre $a \in \mathbb{R}^n$ i radi $r > 0$ és el conjunt

$$B_r(a) = B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r\}.$$

La *bola tancada* de centre $a \in \mathbb{R}^n$ i radi $r > 0$ és el conjunt

$$\overline{B}_r(a) = \overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) \leq r\}.$$

Un *entorn* U d'un punt $a \in \mathbb{R}^n$ és qualsevol subconjunt $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$\exists\, r > 0, \quad a \in B_r(a) \subseteq U.$$

Boles i entorns s'anomenen *foradats* quan es consideren sense incloure el punt a.

11.2.2 Conjunts oberts i tancats

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ és un subconjunt *obert* de $\mathbb{R}^n$ si A és entorn de tots els seus punts, és a dir, si per a cada $a \in A$ existeix $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq A$.

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ és un subconjunt *tancat* de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n \backslash C$ és obert.

Els conjunts oberts satisfan les propietats següents:

a) $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ són subconjunts oberts de $\mathbb{R}^n$.

b) La unió de subconjunts oberts és un obert.

c) La intersecció finita de subconjunts oberts és un obert.

D'aquestes propietats se'n dedueixen les corresponents per a conjunts tancats.

Cal tenir present que, en general, un subconjunt X de $\mathbb{R}^n$ no té perquè ser ni obert ni tancat.

Així mateix, la propietat de ser obert depèn de l'espai on es troba el subconjunt: per exemple, l'interval $(0, 1)$ és un subconjunt obert de $\mathbb{R}$, però el mateix conjunt de punts, $(0, 1) \times \{0\}$, no és un subconjunt obert de $\mathbb{R}^2$.

11.2.3 Situació d'un punt respecte d'un subconjunt de $\mathbb{R}^n$

Siguin $a \in \mathbb{R}^n$ i $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- a és un punt interior d'A
  $\iff a \in \dot{A}$
  $\iff \exists\, r > 0, \quad B_r(a) \subseteq A.$
- a és un punt exterior a A
  $\iff a \in \mathrm{Ext}A$
  $\iff \exists\, r > 0, \quad B_r(a) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash A.$
- a és un punt frontera d'A
  $\iff a \in \partial A$
  $\iff \forall\, r > 0, \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset, \quad B_r(a) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \neq \emptyset.$
- a és un punt adherent a A
  $\iff a \in \overline{A}$
  $\iff \forall\, r > 0, \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset.$
- a és un punt d'acumulació d'A
  $\iff a \in A'$
  $\iff \forall\, r > 0, \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset,\ B_r(a) \cap A \neq \{a\}.$
- a és un punt aïllat d'A
  $\iff \exists\, r > 0, \quad B_r(a) \cap A = \{a\}.$

11.2.4 Conjunts fitats

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ és un subconjunt *fitat* de $\mathbb{R}^n$ si existeix $r > 0$ tal que $X \subseteq \overline{B}_r(0)$, és a dir, tal que $\|x\| \leq r$ per a tot $x \in X$.

11.2.5 Conjunts compactes

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ és un subconjunt *compacte* de $\mathbb{R}^n$ si és tancat i fitat.

11.2.6 Conjunts connexos

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ és un subconjunt *connex* de $\mathbb{R}^n$ si no existeix cap parell d'oberts $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tals que $X \subseteq A \cup B$, $X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$, $X \cap A \cap B = \emptyset$.

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ és un subconjunt *arc-connex* de $\mathbb{R}^n$ si per cada parell de punts $x, y \in X$ existeix un camí entre x i y totalment contingut dins X.

Tot conjunt arc-connex és connex. El recíproc no és cert.

11.3 Exercicis

Exercici 11.1 Dibuixeu els subconjunts de $\mathbb{R}^2$ següents:

a) $A = \{(x, y) \mid |x - 3| < 2, |-y + 1| \leq 5\}$.

b) $B = \{(x, y) \mid |x^2 + 4x + 1| = -x^2 - 4x - 1, |y - 2| < 10\}$.

c) $C = \{(x, y) \mid \|(x, y)\| \leq 1, x < y\}$.

Exercici 11.2 Trobeu l'interior, l'exterior i la frontera dels conjunts següents:

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$.

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy \leq 1\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q}\}$.

Exercici 11.3 Trobeu l'interior, l'exterior, la frontera, l'adherència, els punts d'acumulació i els punts aïllats del conjunt A:

$$A = B(0, \tfrac{1}{2}) \cup \{(x, \sin \tfrac{\pi}{x}) \mid x \in (-1, 0)\} \cup \{(1 - \tfrac{1}{n}, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exercici 11.4 Demostreu o refuteu:

a) La unió d'una família finita de conjunts oberts és un conjunt obert.

b) La unió de conjunts oberts és un conjunt obert.

c) La intersecció d'una família finita de conjunts oberts és un conjunt obert.

d) La intersecció de conjunts oberts és un conjunt obert.

Exercici 11.5 Doneu un subconjunt A i tres punts a, b i c de $\mathbb{R}^n$ tals que:

a) $\dot{A} \neq \emptyset$,

b) $\partial A \neq \emptyset$,

c) $a \in A' \cap A$,

d) $b \in A' \backslash A$,

e) $c \in \overline{A} \backslash A'$.

Podria A ser connex?

Exercici 11.6 Siguin $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{I}$ els conjunts de les funcions $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que són contínues, fitades i integrables, respectivament. Definim:

$$\|f\|_0 = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \qquad \|f\|_1 = \int_a^b |f|, \qquad \|f\|_2 = \int_a^b f^2.$$

Estudieu si $\| \|_0$, $\| \|_1$ i $\| \|_2$ defineixen normes sobre $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{I}$ o no (*nota:* oblideu-vos de la desigualtat triangular per a $\| \|_2$).

12 El concepte de funció

12.1 Funcions reals de variable real

12.1.1 Definició

Una *funció real de variable real* és una aplicació d'un subconjunt A de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccl} f: & A \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

La *gràfica* de la funció f és el conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\}$.

12.1.2 Operacions

Siguin $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) La suma de f i g és la funció $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ definida per $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

b) El producte de f per un escalar $c \in \mathbb{R}$ és la funció $cf : A \to \mathbb{R}$ definida per $(cf)(x) = cf(x)$.

c) El producte de f i g és la funció $fg : A \cap B \to \mathbb{R}$ definida per $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

d) El quocient de f per g és la funció $\frac{f}{g} : A \cap (B \setminus \{x \in B \mid g(x) = 0\}) \to \mathbb{R}$ definida per $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

e) La composició de f seguida de g és la funció $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ definida per $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, i sols existeix si $f(A) \subseteq B$.

Si f és una aplicació bijectiva entre $A \subseteq \mathbb{R}$ i $B \subseteq \mathbb{R}$, la composició de f amb una funció $g : B \to \mathbb{R}$ es pot interpretar com un canvi de variable de la funció g.

12.1.3 Monotonia i convexitat

Sigui $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es tenen les definicions següents:

- La funció f és *creixent* sii $\forall\, x, y \in A \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- La funció f és *decreixent* sii $\forall\, x, y \in A \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- La funció f és *monòtona* sii f és creixent o decreixent.
- La funció f és *estrictament creixent* sii $\forall\, x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- La funció f és *estrictament decreixent* sii $\forall\, x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

- La funció f és *estrictament monòtona* sii f és estrictament creixent o estrictament decreixent.
- La funció f assoleix un *mínim (màxim) absolut* a $a \in A$ sii $\forall x \in A \quad f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$).
- La funció f assoleix un *mínim (màxim) relatiu* a $a \in A$ sii $\exists \delta > 0, \ \forall x \in A \cap (a-\delta, a+\delta) \quad f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$).
- Un *òptim (absolut o relatiu)* és un màxim o un mínim (resp. absolut o relatiu).

Observeu que tota funció estrictament monòtona és injectiva i, per tant, és invertible.

Una funció $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ s'anomena *convexa* (*còncava*) si per cada parell de punts $x_1, x_2 \in I$ i cada paràmetre $t \in [0,1]$ es té la desigualtat

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \text{(resp. } \geq\text{).}$$

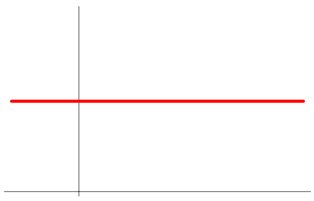
Dit altrament, la funció és convexa si el segment que uneix qualssevol dos punts de la seva gràfica queda per sobre de la gràfica, i és còncava si queda per sota.

12.1.4 Funcions elementals

a) **Funcions constants.** Són les de la forma

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & c \end{array}$$

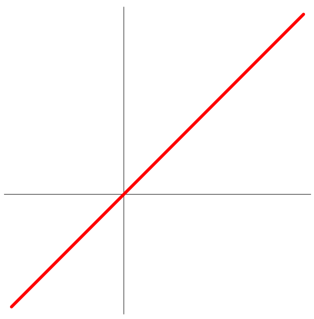
on $c \in \mathbb{R}$ és una constant. La seva gràfica és la recta horitzontal d'equació $y = c$:



b) **Funció identitat.** És la funció de la forma

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

La seva gràfica és la recta que passa per l'origen i bisecta el primer quadrant del pla $y = x$:



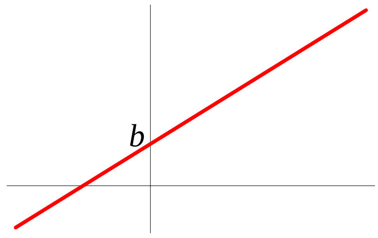
c) **Funcions polinòmiques.** A partir dels dos tipus de funcions anteriors, i per mitjà de sumes i productes, s'obtenen les funcions polinòmiques:

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

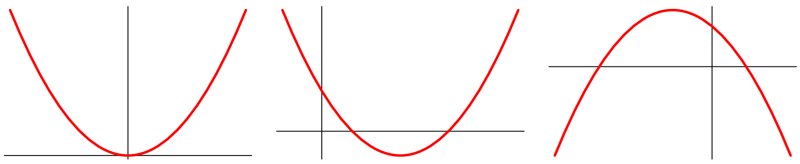
on $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

En particular, són funcions polinòmiques les següents:

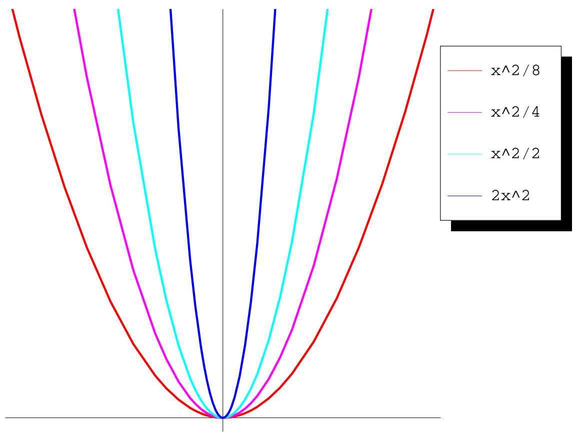
i) **Funcions lineals.** Són les funcions polinòmiques de grau 1, és a dir, les que tenen expressió $f(x) = ax + b$. La seva gràfica és una recta de pendent a que talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, b)$:



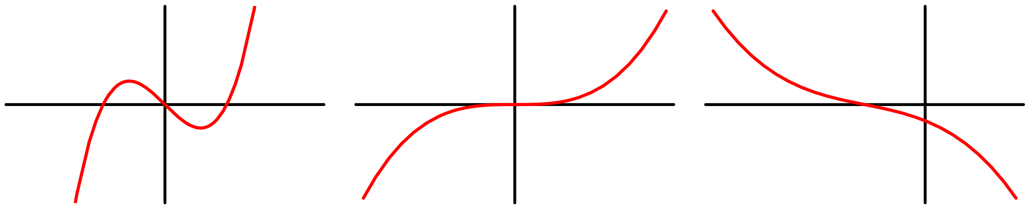
ii) **Funcions quadràtiques.** Són les funcions polinòmiques de grau 2, és a dir, les que tenen expressió $f(x) = ax^2 + bx + c$. La seva gràfica és una paràbola convexa o còncava en funció del signe del coeficient a.



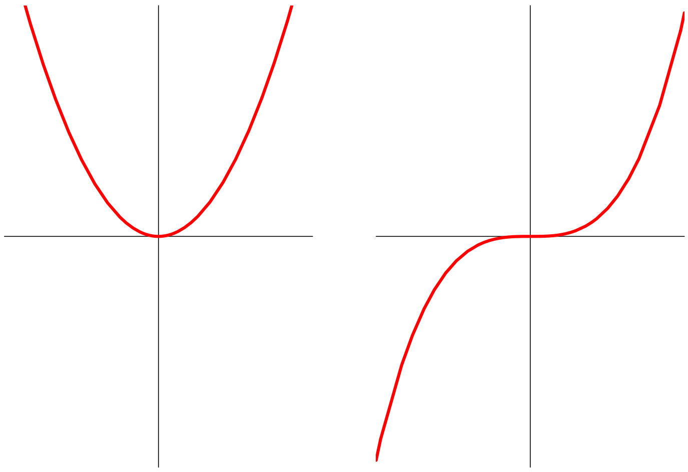
L'obertura de la paràbola depèn del coeficient a, l'eix de la paràbola és la recta $x = -b/2a$, el vèrtex de la paràbola és el punt $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$, i la paràbola talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, c)$.



iii) **Funcions cúbiques.** Són les funcions polinòmiques de grau 3, és a dir, les que tenen expressió $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. La seva gràfica pot tenir aspectes com els següents:



iv) **Funcions polinòmiques de potència parella (senar).** Són les funcions del tipus $f(x) = x^{2n}$ (resp. $f(x) = x^{2n+1}$), on $n \in \mathbb{N}$. Les seves gràfiques tenen l'aspecte següent:



d) **Funcions racionals.** Són quocients de funcions polinòmiques:

$$\begin{array}{rccl} r: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$

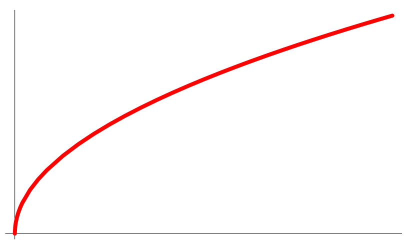
on p i q són funcions polinòmiques. A més, el domini de r és $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

e) **Funcions transcendents.** Les funcions que no es poden expressar com a funcions racionals s'anomenen transcendents. Les més utilitzades són les següents.

i) **Funció arrel quadrada.** És la funció

$$\begin{array}{rccl} \sqrt{\ }: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

que té la gràfica següent:



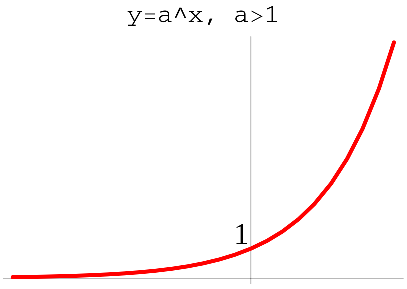
ii) **Funcions exponencials.** Si $a > 0$, la funció exponencial de base a és

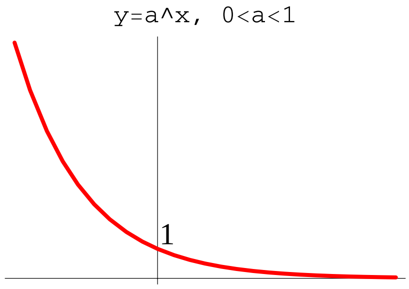
$$\begin{array}{rccc} \exp_a : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a^x \end{array}$$

on:

- Si $x = n \in \mathbb{N}$, aleshores $a^n = a \overset{n}{\cdots} a$.
- Si $x = n \in \mathbb{Z}^-$, aleshores $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.
- Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, aleshores $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.
- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, aleshores $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ per alguna successió de nombres $x_n \in \mathbb{Q}$, i es defineix $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$.

Aquestes són les gràfiques de les funcions exponencials, depenent de si la base a és més petita o més gran que 1:





Algunes propietats de les funcions exponencials són:

i. $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
ii. Si $a \neq 1$, la funció a^x és bijectiva entre $\mathbb{R}$ i $(0, +\infty)$.
iii. $a^0 = 1$.
iv. $a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
v. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
vi. $a^{xy} = (a^x)^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
vii. No s'han de confondre $(a^x)^y$ i a^{x^y}.
viii. Si $a > 1$, aleshores a^x és estrictament creixent, és a dir:

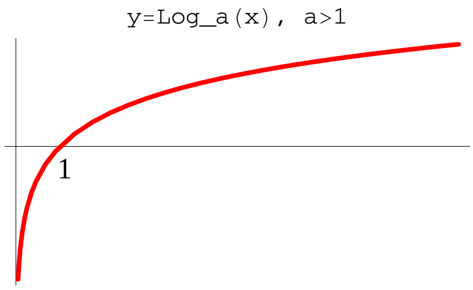
$$x < y \Rightarrow a^x < a^y.$$

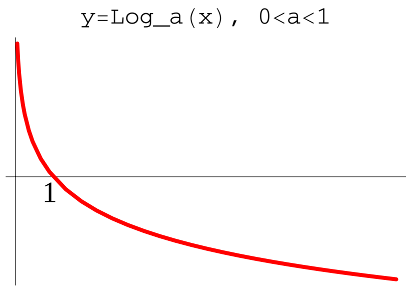
Si $0 < a < 1$, aleshores a^x és estrictament decreixent, és a dir:

$$x < y \Rightarrow a^x > a^y.$$

La funció exponencial per excel·lència és la que fa servir com a base el nombre $e = 2.71\ldots$.

iii) **Funcions logarítmiques.** Aquestes funcions són les inverses de les funcions exponencials. Si $a > 0$, aleshores $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Les gràfiques d'aquestes funcions són:





Algunes propietats de les funcions logarítmiques són:

i. El domini de la funció és $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

ii. La funció $\log_a x$ és bijectiva entre $(0, +\infty)$ i $\mathbb{R}$.

iii. $\log_a 1 = 0$.

iv. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \forall\, x, y \in (0, +\infty)$.

v. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \forall\, x, y \in (0, +\infty)$.

vi. $\log_a x^y = y \log_a x \quad \forall\, x \in (0, +\infty),\ \forall\, y \in \mathbb{R}$.

vii. $\forall\, a, b > 0,\ \log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

viii. Si $a > 1$, aleshores $\log_a x$ és estrictament creixent, és a dir:

$$x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y.$$

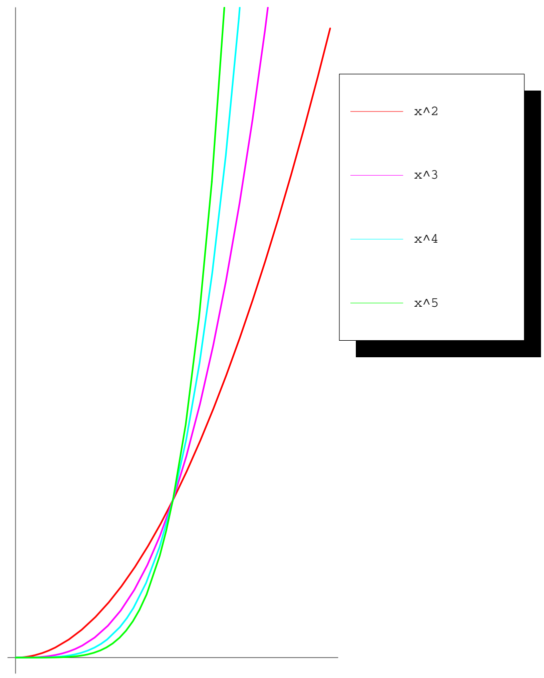
Si $0 < a < 1$, aleshores $\log_a x$ és estrictament decreixent, és a dir:

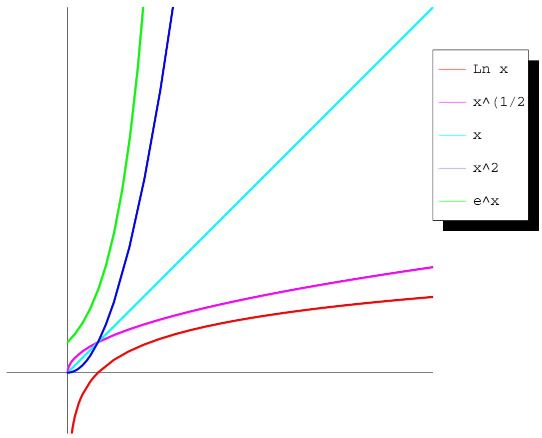
$$x < y \Rightarrow \log_a x > \log_a y.$$

La funció logarítmica per excel·lència és la que fa servir com a base el nombre e. Aquest logaritme s'anomena *neperià* i s'escriu $\ln x$.

iv) **Altres funcions transcendents.** Existeixen moltes altres funcions transcendents, i algunes molt emprades en altres camps, com ara les funcions trigonomètriques o les funcions hiperbòliques.

Les figures següents il·lustren el comportament comparat de diverses de les funcions que hem presentat.





12.2 Funcions de diverses variables

12.2.1 Definicions

Una *funció de diverses variables* és

$$\begin{array}{rccl} f: & D \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & f(x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_m) \end{array}$$

La funció $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s'estudia a través de les seves *funcions components*:

$$\begin{array}{rccl} f_i: & D \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & f_i(x_1,\ldots,x_n) = y_i \end{array}$$

Sigui $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$. La *corba de nivell* a de la funció f és el conjunt

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = a\}.$$

En general, si $f : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$, la *superfície de nivell* a de la funció f és el conjunt

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = a\}.$$

Una funció $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s'anomena *fitada* en D quan $f(D)$ és un conjunt fitat, és a dir, quan

$$\exists\ M \in \mathbb{R} \quad \forall\ x \in D \quad \|f(x)\| \leq M.$$

12.2.2 Operacions

Les operacions més freqüents amb funcions de diverses variables són:

a) Suma

b) Producte per un escalar

c) Producte (quan $m = 1$)

d) Quocient (quan $m = 1$ i la funció denominador no s'anul·la)

e) Composició

f) Inversió

12.3 Exercicis

Exercici 12.1 Trobeu el domini de les funcions següents:

a) $y = x^2 + 1$.

b) $y = \frac{x}{x+1}$.

c) $y = +\sqrt{x^2 - 1}$.

d) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

e) $y = \frac{x-3}{x^2(x^2-4)}$.

f) $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x+3)}}$.

g) $y = \sqrt{2 + x + x^2}$.

h) $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$.

i) $y = \ln \frac{2+x}{2-x}$.

Exercici 12.2 Una funció s'anomena parell si $f(x) = f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, i s'anomena imparell si $f(x) = -f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Digueu quines de les funcions següents són parell i quines imparell:

   i) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$.

   ii) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$.

   iii) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

   iv) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

b) Demostreu que el producte d'una funció parell per una d'imparell és una funció imparell, mentre que el producte de dues funcions del mateix tipus és una funció parell.

Exercici 12.3 Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, calculeu $f \circ f \circ f$.

Exercici 12.4 Suposem que x_1, x_2, x_3 formen una progressió aritmètica. Demostreu:

a) Si f és una funció lineal, aleshores $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ formen una progressió aritmètica.

b) Si f és una funció exponencial, aleshores $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ formen una progressió geomètrica.

Exercici 12.5 Sigui f una funció convexa. Demostreu:

a) $\forall\, x < y < z \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

b) $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \quad f\left(\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\ldots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$.

c) Utilitzeu la convexitat/concavitat de les funcions exponencial/lograrítmica per demostrar que la mitjana geomètrica de dos nombres sempre és més petita o igual que la seva mitjana aritmètica.

Exercici 12.6 Trobeu el domini de les funcions següents:

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

b) $z = \ln(x + y)$;

c) $z = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y}$;

d) $z = \dfrac{3}{r^2 - x^2 - y^2}$

Exercici 12.7 Per cadascuna de les funcions següents, dibuixeu les corbes de nivell corresponents als valors $z = -2, -1, 0, 1, 3$:

a) $z = x^2 y$;

b) $z = x^2 + y^2 - 1$;

c) $z = y^2$;

d) $z = 1 - |x| - |y|$.

13 El concepte de límit

13.1 El cas discret

13.1.1 Successions a $\mathbb{R}$

13.1.1.1 Definicions

Una *successió* a $\mathbb{R}$ és una aplicació $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que escrivim $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o també $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Una *successió parcial* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s'obté en composar la successió amb una aplicació $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictament creixent.

Exemples:

a) La successió dels nombres positius parells es pot definir donant la regla de formació del seu terme n-èsim: $x_n = 2n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. També es pot definir de manera recursiva: $x_0 = 0$, $x_{n+1} = x_n + 2 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) La successió dels nombres naturals múltiples de 4 és una successió parcial de l'anterior.

Un nombre $l \in \mathbb{R}$ s'anomena *límit* d'una successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, i s'escriu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, si

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0 \quad |x_n - l| < \epsilon.$$

Una *successió convergent* és una successió que té límit. En cas contrari la successió s'anomena *divergent*.

Exemples:

a) La successió $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida per $a_n = 3 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ és una successió constant, i és convergent.

b) La successió $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ amb $b_n = (-1)^n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ s'anomena alternada, i és divergent.

c) La successió $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ és convergent.

d) La successió $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ és convergent.

e) La successió de Fibonacci, que es defineix per inducció com $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, és divergent.

Es diu que una successió *divergeix cap a* $+\infty$, i s'escriu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ si

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0 \quad x_n > M.$$

Es diu que una successió *divergeix cap a* $-\infty$, i s'escriu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ si

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0 \quad x_n < -M.$$

Es diu que una successió *divergeix cap a* ∞, i s'escriu $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ si

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0 \quad |x_n| > M.$$

13.1.1.2 Propietats

a) Tota successió convergent està fitada.

b) Si dues successions són convergents, la seva suma també és convergent, i el límit de la suma és la suma dels límits.

c) Si una successió és convergent i es multiplica per un escalar, la successió resultant també és convergent, i el seu límit és el producte de l'escalar pel límit de la successió inicial.

d) Si dues successions són convergents, el seu producte també és convergent, i el límit del producte és el producte dels límits.

e) Si dues successions són convergents, i és possible fer els quocients dels seus termes així com el quocient dels seus límits, aleshores el quocient de les dues successions també és convergent, i el límit del quocient és el quocient dels límits.

f) El producte d'una successió convergent a zero per una successió fitada és una successió convergent a zero.

g) Si tots els termes d'una successió convergent són més grans o iguals (més petits o iguals) que un cert valor, aleshores el límit de la successió també ho és.

h) Si, per tot n, el terme n-èsim d'una successió convergent és més gran o igual (més petit o igual) que el terme n-èsim d'una altra successió convergent, aleshores el límit de la primera també és més gran o igual (resp. més petit o igual) que el límit de la segona.

i) Si, per tot n, el terme n-èsim d'una successió es troba entre el terme n-èssim de dues altres successions, i aquestes dues són convergents cap a un mateix límit, aleshores la successió inicial també és convergent cap al mateix límit.

j) Si una successió és convergent amb límit l, aleshores la successió dels seus valors absoluts és convergent amb límit $|l|$. El recíproc sols és cert en el cas que $l = 0$.

k) Si una successió és convergent, totes les seves parcials són convergents i, a més, tenen el mateix límit. El recíproc sol és cert si totes les parcials convergeixen i ho fan cap a un mateix límit.

l) Tota successió monòtona creixent (decreixent) i fitada superiorment (resp. inferiorment) és convergent, i el seu límit coincideix amb el seu suprem (resp. ínfim).

m) Teorema de Bolzano-Weierstrass: Tota successió té una parcial monòtona.

n) Corol·lari: Tota successió fitada té una parcial convergent.

o) Tota successió convergent és de Cauchy, i viceversa. La condició de Cauchy és la següent:

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ k_1, k_2 > k_0 \quad |x_{k_1} - x_{k_2}| < \epsilon.$$

p) Un subconjunt $A \subseteq \mathbb{R}$ és tancat si, i només si, tota successió convergent de punts d'A té el límit en A.

Exemples: Els resultats següents s'obtenen aplicant les propietats anteriors.

a) La successió $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ és divergent.

b) La successió definida per $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n}$ és divergent.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 5n + 4}{3n^3 + 2n^2 - 5} = 0.$

f) La successió $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ és convergent.

13.1.2 Successions a $\mathbb{R}^n$

13.1.2.1 Definicions

Una *successió* a $\mathbb{R}^n$ és una aplicació $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que escrivim $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Té associades n successions de $\mathbb{R}$, $\{(x_k)_i\}_{k\in\mathbb{N}}$, amb $i = 1, \ldots, n$, que són les seves successions components.

Una *successió parcial* de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ s'obté en composar la successió amb una aplicació $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictament creixent.

Un punt $l \in \mathbb{R}^n$ s'anomena *límit* d'una successió $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ k > k_0 \quad x_k \in B_\epsilon(l),$$

o sigui,

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ k > k_0 \quad \|x_k - l\| < \epsilon.$$

Una *successió convergent* és una successió que té límit.

13.1.2.2 Propietats

Una successió és convergent amb límit l si, i només si, per cada $i = 1, \ldots, n$, la seva successió component i-èsima és convergent amb límit l_i.

Gràcies a aquesta propietat, les successions a $\mathbb{R}^n$ gaudeixen de les propietats anàlogues a les successions a $\mathbb{R}$, emb el benentès que algunes no tenen una versió multidimensional (quines?).

13.1.3 Exercicis

Exercici 13.1 Calculeu el límit de les successions següents:

a) $\frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{2}}$

b) $\frac{6n^3+4n+1}{2n^2}$

c) $\frac{n^2+6n+2}{3n^2+9n}$

d) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+\frac{1}{2}}$

e) $\frac{\sin n}{n}$

f) $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

g) $\left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\sin\frac{1}{n}}$

h) $\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

i) $\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right)^{\frac{2n-1}{3n+1}}$

j) $\ln\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n$

k) $\frac{5(n+1)^{n+1}}{(3n^2+1)n^{n-1}}$

l) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$

Exercici 13.2 Sigui $P(x)$ un polinomi de grau $k > 0$ amb els coeficients reals i positius. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $P(n)$

b) $P(\frac{1}{n})$

c) $\frac{P(n+1)}{P(n)}$

d) $P(n+1) - P(n)$

Exercici 13.3 Trobeu una successió que tingui parcials convergents cap a

a) 0 i 1.

b) π, e, $\sqrt{2}$, 17.

c) $n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercici 13.4 Si $a_n > 0$, $b_n > 0$ i $\lim a_n = \lim b_n = 0$, demostreu:

a) $\lim \dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n} = 0.$

b) La hipòtesi $a_n > 0$ i $b_n > 0$ és imprescindible.

Exercici 13.5 Demostreu que la successió següent té límit, i calculeu-lo:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}, \\ a_{n+1} &= \sqrt{a_n + 2} \quad \forall\, n \geq 0. \end{aligned}$$

Exercici 13.6 Sigui $x_n = \sqrt{2}$ i $x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Demostreu que la successió $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix, i calculeu el seu límit amb un error més petit que 0.7.

13.2 El cas continu

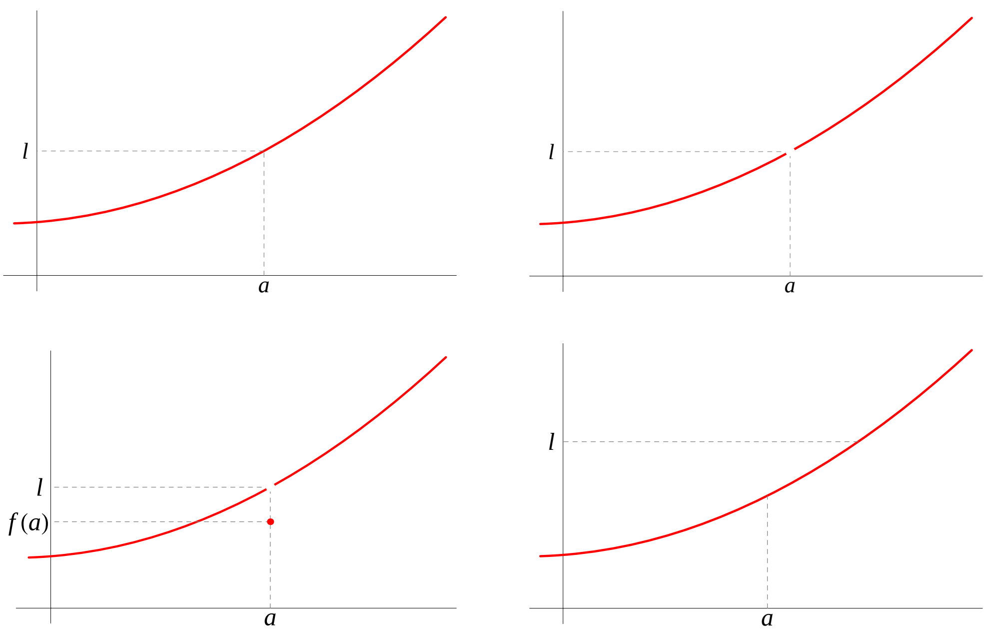
13.2.1 Límits de funcions d'una variable

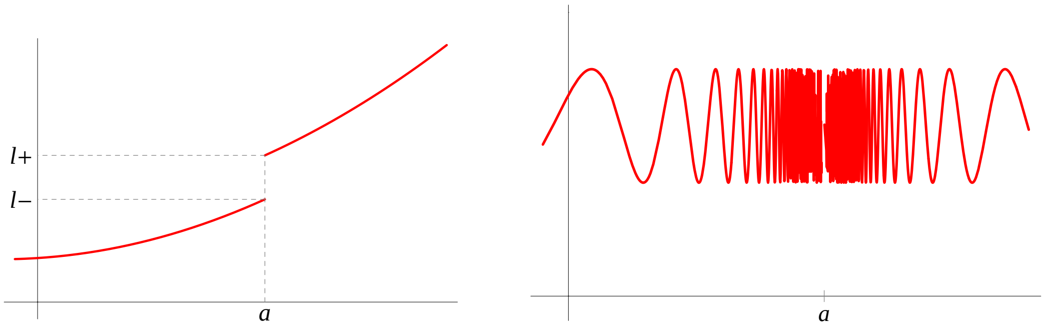
13.2.1.1 Definició de límit

Sigui f una funció definida en un entorn (foradat) $A = (a - h, a + h) \setminus \{a\}$ del punt a, i sigui $l \in \mathbb{R}$. Es diu que l és el *límit de la funció* f *quan* x *tendeix a* a, i s'escriu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ quan

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in A \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

La figura següent il·lustra diverses situacions possibles. En els tres primers casos, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, en el quart cas $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l$, i en els casos cinquè i sisè $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.





Anàlogament, es tenen les definicions següents:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \epsilon$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \epsilon$$

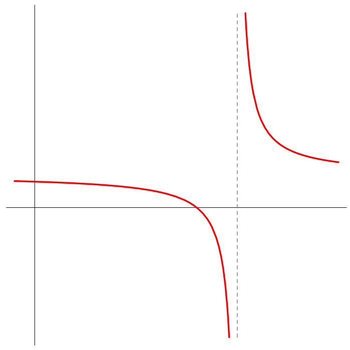
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad x < -\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad x < -\delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

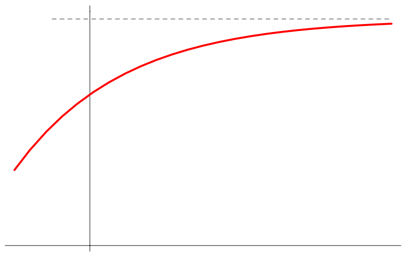
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A \quad x < -\delta \Rightarrow |f(x)| > \epsilon$$

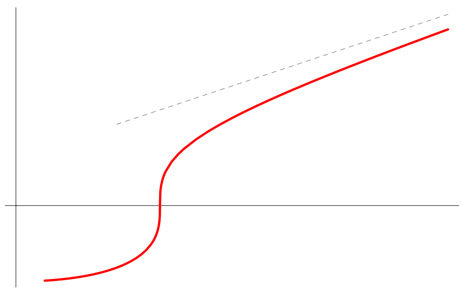
Quan $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, es diu que la recta $x = a$ és una *asímptota vertical* de la funció f.



Quan $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$, es diu que la recta $y = l$ és una *asímptota horitzontal* de la funció f.



Finalment, es diu que la recta $y = ax + b$ és una *asímptota obliqua* de la funció f quan $\lim_{x\to\pm\infty} (ax + b - f(x)) = 0$.



13.2.1.2 Límits laterals

En estudiar el comportament d'una funció f al voltant d'un punt a, sovint pot ser útil considerar el comportament de la funció a cadascun dels dos costats d'a. Es defineixen els *límits per l'esquerra i per la dreta* de f en a de la manera següent:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in A \quad a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in A \quad a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Anàlogament es defineix el significat de les expressions $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Caracterització del límit per límits laterals. Si existeix el límit d'una funció en un punt, aleshores existeixen els límits laterals i coincideixen amb el límit. Recíprocament, si existeixen els dos límits laterals i són iguals, aleshores existeix el límit i coincideix amb els anteriors.

13.2.1.3 Propietats dels límits

Les propietats següents s'enuncien per a límits, però també són vàlides per a límits laterals.

a) Si existeixen els límits de f i g en el punt a, aleshores existeix el límit de $f+g$ en a, i $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

b) Si existeix el límit de f en el punt a, aleshores existeix el límit de λf en a, i $\lim_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x)$.

c) Si existeixen els límits de f i g en el punt a, aleshores existeix el límit de fg en a, i $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$.

d) Si existeixen els límits de f i g en el punt a, i $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, aleshores existeix el límit de $\frac{f}{g}$ en a, i $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

e) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en un entorn del punt a, i els límits de f i h en el punt a existeixen i coincideixen, aleshores existeix el límit de g en a, i coincideix amb els anteriors.

f) Si f és una funció fitada en un entorn del punt a, i $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, aleshores $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$.

g) Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim_{y\to b} g(y) = c$, aleshores $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$. Aquesta propietat no val per límits laterals. Perquè?

h) Si existeix el límit de f en el punt a i és finit, aleshores f està fitada en un entorn foradat d'a: $(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$.

13.2.1.4 Ordres de magnitud

Siguin f i g dues funcions tals que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Es diu que f és $O(g)$ si $\exists\, c>0\ \exists\, x_0\in\mathbb{R}\ \forall\, x>x_0 \quad f(x)\leq cg(x)$.

Es diu que f és $o(g)$ si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Aquesta notació permet, doncs, comparar el creixement de dues funcions.

13.2.2 Continuïtat de funcions d'una variable

13.2.2.1 Definicions

Sigui f una funció definida en un entorn d'un punt a.

- f és *contínua en* a si, i només si, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f és *contínua per la dreta en* a si, i només si, $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
- f és *contínua per l'esquerra en* a si, i només si, $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Sigui f una funció definida en un interval de la recta real.

- f és *contínua en* (a, b) si, i només si, f és contínua en x per tot $x \in (a, b)$.
- f és *contínua en* $[a, b]$ si, i només si, f és contínua en x per tot $x \in (a, b)$, és contínua per la dreta en a i és contínua per l'esquerra en b.

13.2.2.2 Propietats

a) Si f i g són contínues en a, aleshores $f + g$ és contínua en a.

b) Si f és contínua en a, aleshores λf és contínua en a.

c) Si f i g són contínues en a, aleshores fg és contínua en a.

d) Si f i g són contínues en a, i $g(a) \neq 0$, aleshores $\frac{f}{g}$ és contínua en a.

e) Si f és contínua en a i g és contínua en $f(a)$, aleshores $g \circ f$ és contínua en a.

f) Si f és contínua en a, aleshores f està fitada en un entorn $[a - \delta, a + \delta]$ del punt a.

g) Si f és contínua en a, i $f(a) > 0$, aleshores $f(x) > 0$ en un entorn $(a - \delta, a + \delta)$ del punt a.

Les propietats anteriors també s'apliquen a la continuïtat lateral, excepte la que es refereix a la composició.

Teorema de Bolzano. Si f és contínua en un interval tancat $[a, b]$, i $f(a)f(b) < 0$, aleshores la funció s'anul·la en algun punt de l'interior de l'interval, és a dir: existeix $t \in (a, b)$ tal que $f(t) = 0$.

Teorema dels valors intermedis. Si f és contínua en un interval tancat $[a, b]$ aleshores, per a qualsevol valor c intermedi entre $f(a)$ i $f(b)$ (és a dir, tal que $f(a) < c < f(b)$ o $f(a) > c > f(b)$) existeix algun $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

Teorema de Weierstrass. Si f és contínua en un interval tancat $[a, b]$, aleshores f està fitada en $[a, b]$.

Teorema del màxim. Si f és contínua en un interval tancat $[a, b]$, aleshores f assoleix un màxim i un mínim en $[a, b]$, és a dir,

$$\exists\, x_1, x_2 \in [a, b] \quad \forall\, x \in [a, b] \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Teorema. Si f és contínua en un interval tancat $[a, b]$, aleshores f és injectiva si, i només si, f és estrictament monòtona. En aquest cas, f és invertible, i la seva inversa també és contínua i estrictament monòtona.

13.2.3 Límits de funcions de diverses variables

13.2.3.1 Definició Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, i siguin $a \in D'$ i $l \in \mathbb{R}^m$. Es diu que l és el *límit* de la funció f en el punt a, i s'escriu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad f((B_\delta(a) - \{a\}) \cap D) \subseteq B_\epsilon(l),$$

és a dir,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \epsilon.$$

13.2.3.2 Propietats

a) Existeix el límit d'una funció en un punt i és l si, i només si, per a cada i, existeix el límit de la seva funció component i-èsima en el punt i és l_i.

b) Si una funció té límit en un punt, aleshores està fitada en un entorn (foradat) del punt.

c) Siguin f i g dues funcions amb el mateix domini i el mateix recorregut. Si f i g tenen límit en un punt a, i és respectivament l_f i l_g, aleshores qualsevol combinació $\alpha f + \beta g$ té límit en el punt, i aquest límit és $\alpha l_f + \beta l_g$.

13.2.3.3 Càlcul de límits El cas més senzill de càlcul de límits de funcions de diverses variables és aquell en què resulta possible fer el càlcul directe o reduir el problema al del càlcul d'un límit d'una variable. Per exemple:

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} x \sin xy = 2 \sin 2 \cdot 0 = 2 \cdot 0 = 0. \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} = 0 \cdot \text{fitat} = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} x = 1 \cdot 0 = 0.$$

La forma més sistemàtica de calcular límits de funcions de dues variables és per canvi a coordenades polars. Per exemple:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{|r^2\cos\theta\sin\theta|}{r} = \lim_{r\to 0} r|\cos\theta\sin\theta| = 0,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}\cos\theta\sin\theta \quad \nexists.$$

Una altra possibilitat, quan el que es desitja és demostrar la inexistència de límit, és calcular límits segons trajectòries. Per exemple:

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2},$$

ja que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),x=0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0),y=x} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

Així mateix,

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{y^2} e^{-\frac{|x|}{y^2}},$$

ja que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),x=0} \frac{|x|}{y^2} e^{-\frac{|x|}{y^2}} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0),x=y^2} \frac{|x|}{y^2} e^{-\frac{|x|}{y^2}} = \frac{1}{e}.$$

Cal tenir present que aquest darrer mètode no serveix per demostrar l'existència de límit: el fet que existeixin i coincideixin tots els límits direccionals d'una funció en un punt no garanteix que existeixi el límit de la funció en el punt, tal com il·lustra la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y}, & \text{si } x^2 \neq -y; \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

13.2.4 Continuïtat de funcions de diverses variables

13.2.4.1 Definicions Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, i considerem $a \in \dot{D}$ (de fet, n'hi hauria prou que $a \in D \cap D'$).

La funció f és *contínua* en el punt a si, i només si, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, és a dir si, i només si,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \epsilon.$$

La funció f és *contínua* en un obert $A \subseteq D$ si, i només si, és contínua en cada punt d'A, és a dir si, i només si,

$$\forall\, a \in A \quad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in A \quad \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \epsilon.$$

13.2.4.2 Propietats

a) La funció f és contínua en el punt a si, i només si, totes les seves funcions components f_i són contínues en a.

b) Si f i g són contínues en el punt a, aleshores tota combinació $\alpha f + \beta g$ és contínua en a.

c) Si f és contínua en a i g és contínua en $f(a)$, aleshores $g \circ f$ és contínua en a.

Caracterització topològica de la continuïtat. Una funció f és contínua en un domini D si, i només si, la antiimatge de tot conjunt obert és un conjunt obert. També es pot fer la caracterització anàloga per conjunts tancats.

Continuïtat i connexió. La imatge contínua d'un conjunt connex (resp. arc-connex) és un connex (resp. arc-connex).

Teorema dels valors intermedis. (Sols per al cas $m = 1$.) Sigui f una funció contínua en un conjunt connex C. Per a tot $x, y \in C$, si $f(x) < c < f(y)$, aleshores existeix $z \in C$ tal que $c = f(z)$.

Continuïtat i compacitat. La imatge contínua d'un conjunt compacte sempre és un compacte. En particular, doncs, la imatge contínua d'un compacte està fitada.

Teorema del màxim. (Sols per al cas $m = 1$.) La imatge contínua d'un compacte té màxim i mínim.

13.2.5 Exercicis

Exercici 13.7 Calculeu els límits següents:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2x+1}{3x+5}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

f) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

h) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^3} \right)$.

Exercici 13.8 Demostreu l'existència o no dels límits següents:

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3}$.

Exercici 13.9 Siguin $f(x) = e^{1/x}$ $\forall\, x \neq 0$ i $g(x) = \frac{e^{1/x}}{e^{1/x}-1}$ $\forall\, x \neq 0$. Discutiu els límits laterals en el punt zero de les funcions $f(x)$, $g(x)$ i $xg(x)$.

Exercici 13.10 Suposeu que $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = +\infty$. Digueu si es dedueixen cadascuna de les afirmacions següents, i perquè:

a) $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

b) $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = 0$.

c) $\lim_{x\to c} (f(x)g(x)) = +\infty$.

d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exercici 13.11 Estudieu la continuïtat de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x^2-8x+15}$.

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

c) $f(x) = \dfrac{x-5}{(x+1)^2}$.

d) $f(x) = e^{1/x}$.

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{1/x}}$.

Exercici 13.12 Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida així:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0; \\ 1/x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \\ x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demostreu que f és bijectiva i que tan sols és contínua en dos punts.

Exercici 13.13 Sigui $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$, $\forall\, x \neq 2$. Es pot definir $f(2)$ de manera que f sigui contínua?

Exercici 13.14 Quins valors d'a fan contínua la funció següent?

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \leq 1; \\ 3 - a^2x^2, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercici 13.15 Proveu que el polinomi $x^3 - 3x + 1$ té una arrel real a l'interval $(1,2)$.

Exercici 13.16 Demostreu que tot polinomi de grau senar té com a mínim una arrel real.

Exercici 13.17 Teorema del punt fix. Demostreu que tota funció contínua de l'interval $[0,1]$ en ell mateix té un punt fix, és a dir, que existeix un valor $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$. Doneu una interpretació gràfica d'aquest resultat.

Exercici 13.18 Demostreu que el polinomi $x^4 + 2x^3 - 1$ té al menys dues arrels reals.

Exercici 13.19 Demostreu que l'equació $\sin x = x - 1$ té solucions reals.

Exercici 13.20 Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Demostreu que f està fitada i que assoleix un màxim o un mínim. Doneu un exemple que mostri que no necessàriament ha d'assolir els dos.

Exercici 13.21 Trobeu el límit de les funcions següents:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$;

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$.

Exercici 13.22 Calculeu el límit en $(0,0)$ de la funció

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x-y}, e^{x+y} \right) \qquad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Exercici 13.23 Demostreu que la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{si } x^2+y^2 = 0; \end{cases}$$

és contínua en relació a les variables x i y per separat, però no és contínua en el punt $(0,0)$ respecte del conjunt de les dues variables.

Exercici 13.24 Sigui $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$z(x,y) = \begin{cases} f(x), & \text{si } y = 0; \\ g(y), & \text{si } x = 0; \\ (x+y)\left(\dfrac{\sin^2 x}{x} + \dfrac{\sin^2 y}{y}\right), & \text{si } x \neq 0 \text{ i } y \neq 0. \end{cases}$$

Determineu f i g per tal que la funció z sigui contínua a tot $\mathbb{R}^2$.

Exercici 13.25 Sigui $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2x, y \leq x\}$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \sin(x+y)\right), \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0);$$
$$f(0,0) = (0,0).$$

a) Demostreu que M és compacte.

b) Estudieu la continuïtat de f.

c) Estudieu la compacitat de M.

Exercici 13.26 Definim la funció real de dues variables reals anomenada min, així:

$$\min(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq y; \\ y, & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Construïm la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \min\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right), & \text{si } x \neq 0 \text{ i } y \neq 0; \\ 1/x, & \text{si } x \neq 0 \text{ i } y = 0; \\ 1/y & \text{si } x = 0 \text{ i } y \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

a) En quins punts és contínua la funció $\min(x,y)$?

b) Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció $f(x,1)$.

c) En quins punts és contínua $f(x,y)$?

d) El mateix per $f(x^2,y^2)$.

e) El mateix per $f(x,e^y)$.

Exercici 13.27 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\frac{x^2}{4} + y^2 - 1}, & \text{si } \frac{x^2}{4} + y^2 \neq 1 \text{ i } (x,y) \neq (0,0); \\ 1, & \text{altrament.} \end{cases}$$

a) Estudieu la continuïtat de f.

b) Considereu els conjunts

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \tfrac{1}{2}\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-16)^2 + (y-12)^2 \leq 4\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}. \end{aligned}$$

Són fitats els conjunts $f(A)$, $f(B)$ i $f(C)$?

14 El concepte de derivada

14.1 Diferenciació de funcions d'una variable

14.1.1 Derivada

Sigui $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a, b)$. La funció f és *derivable* en x_0 si existeix el límit següent i és finit:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Aquest límit s'anomena *derivada* de f en x_0.

La derivada d'una funció f en un punt x_0 es pot interpretar geomètricament com el límit dels pendents de les cordes que passen pels punts $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$ quan $x \to x_0$, és a dir, com el pendent de la recta que passa pel punt $(x_0, f(x_0))$ i és tangent a f.

La funció f s'anomena *derivable* en (a, b) si és derivable en x per tot $x \in (a, b)$. En aquest cas, la *funció derivada* de f és

$$\begin{array}{rccc} f' : & (a, b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

La funció f s'anomena *contínuament derivable* en (a, b) si f és derivable en (a, b) i f' és contínua en (a, b). També es diu que f és *de classe* C^1. En general, és possible considerar les derivades successives d'una funció, $f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ i les classes $C^2, \ldots, C^n, \ldots$.

També pot tenir interès estudiar la *derivabilitat lateral* d'una funció en un punt:

$$\text{f és } \textit{derivable a la dreta} \text{ en } x \iff \exists\ f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$\text{f és } \textit{derivable a l'esquerra} \text{ en } x \iff \exists\ f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}.$$

14.1.2 Propietats

Derivabilitat i derivades laterals. Una funció f és derivable en x si, i només sí, és derivable a l'esquerra i a la dreta en x i les derivades laterals $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ coincideixen.

Derivabilitat i continuïtat. Si f és derivable en x, aleshores f és contínua en x. El recíproc no és cert.

Operacions amb derivades. Siguin f i g dues funcions derivables en un cert punt c. Aleshores:

a) La funció $f+g$ és derivable en c i $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

b) La funció λf és derivable en c i $(\lambda f)'(c) = \lambda f'(c)$.

c) La funció fg és derivable en c i $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.

d) La funció $\frac{f}{g}$ és derivable en c i $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$, sempre que $g(c) \neq 0$.

Regla de la cadena. Si f i g són tals que $\text{Im } f \subseteq \text{Dom } g$, f és derivable en c i g és derivable en $f(c)$, aleshores la funció $g \circ f$ és derivable en c, i

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Teorema de la funció inversa. Sigui $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funció contínua i injectiva, i sigui $c \in (a,b)$ un punt tal que f és derivable en c i $f'(c) \neq 0$. Aleshores la inversa $g : \text{Im } f \to \mathbb{R}$ de f és derivable en $d = f(c)$ i

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}.$$

14.1.3 Els teoremes del valor mig

Teorema de Rolle. Sigui f una funció real contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, aleshores existeix $t \in (a,b)$ tal que $f'(t) = 0$.

Teorema del valor mig. Sigui f una funció real contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b). Aleshores existeix $t \in (a,b)$ tal que $f'(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Polinomis de Taylor. Sigui f una funció n cops derivable en un punt x_0. El *polinomi n-èsim de Taylor* de f en x_0 és:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

El polinomi P_n i la funció f coincideixen en el punt x_0 fins a la derivada n-èsima.

Teorema de Taylor. Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció derivable $n+1$ cops, i tal que $f, f', \ldots, f^{(n)}$ són contínues. Sigui $x_0 \in (a,b)$. Aleshores, per a tot $x \in [a,b]$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

i existeix t entre x i x_0 tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

14.2 Optimització de funcions d'una variable

14.2.1 Extrems absoluts i extrems locals

Sigui f una funció real definida en un interval (a, b). Es diu que f té un *màxim (mínim) absolut* en $x_0 \in (a, b)$ si

$$\forall\, x \in (a, b) \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } \geq).$$

Es diu que f té un *màxim (mínim) local* o *relatiu* en $x_0 \in (a, b)$ si

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } \geq).$$

En general, es diu que f té un *extrem* o un *òptim* absolut o relatiu en un punt quan hi té un màxim o un mínim, respectivament absolut o relatiu.

Observeu que si una funció té un òptim absolut, aquest és únic. En canvi, una funció pot tenir múltiples òptims locals.

14.2.2 Condició necessària de primer ordre

Sigui f una funció real definida en un interval (a, b). Es diu que $x_0 \in (a, b)$ és un *punt singular* de f si $f'(x_0) = 0$.

Teorema. Sigui f una funció real definida en un interval (a, b). Sigui $t \in (a, b)$ i f derivable en t. Si f té un extrem relatiu en t, aleshores t és un punt singular de f. El recíproc no és cert, tal com es pot comprovar amb la funció $f(x) = x^3$. Els punts singulars que no són extrems locals s'anomenen *punts d'inflexió*.

14.2.3 Condicions suficients de primer i de segon ordre

Monotonia i primera derivada. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b). Aleshores:

- Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $\leq$) $\forall\, x \in (a, b)$, aleshores f és creixent (resp. decreixent) en $[a, b]$, i viceversa.
- Si $f'(x) > 0$ (resp. $<$) $\forall\, x \in (a, b)$, aleshores f és estrictament creixent (resp. estrictament decreixent) en $[a, b]$. El recíproc no és cert.

Condició suficient de primer ordre. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$. Sigui $t \in (a, b)$, tal que f és derivable en $(a, b) \setminus \{t\}$. Si $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) en un entorn a l'esquerra de t i $f' \leq 0$ (resp. $f' \geq 0$) en un entorn a la dreta de t, aleshores f té un màxim (resp. mínim) relatiu a t.

Condició suficient de segon ordre. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b). Sigui $t \in (a, b)$ tal que $f'(t) = 0$ i f és dos cops derivable a t. Si $f''(t) > 0$ ($f''(t) < 0$), aleshores f té un mínim (resp. màxim) relatiu a t.

Convexitat i segona derivada. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i dos cops derivable en (a, b). Aleshores $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) en (a, b) si, i només si, f és convexa (resp. còncava) en $[a, b]$.

14.3 Exercicis

Exercici 14.1 Construïu la taula de derivades següent:

a) $f(x) = k \Longrightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1} \; \forall \, n \neq 0$

c) $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = 1/x$

d) $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$

Exercici 14.2 Feu servir que $\dfrac{f(a + dx) - f(a)}{dx} \approx f'(a)$ per trobar un valor aproximat de

a) $\sqrt{4.1}$

b) $\ln 0.9$

c) $e^{0.4}$

Exercici 14.3 Estudieu la derivabilitat de les funcions següents, i escriviu la corresponent funció derivada, allà on estigui definida:

a) $f(x) = x|x|$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \leq 0; \\ e^{-x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Exercici 14.4 Trobeu les derivades laterals de la funció següent en el punt $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercici 14.5 Demostreu que l'equació $3x^4 + 4x^3 + c = 0$ pot tenir, com a màxim, una arrel més petita o igual que -1, no importa el valor de c.

Exercici 14.6 Demostreu que el polinomi $(x+1)(x+2)(x+3) + x(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + x(x+1)(x+2)$ té tres arrels reals.

Exercici 14.7 La funció $f(x) = 1 - (x - 1)^{2/3}$ s'anul·la als extrems de l'interval $[0, 2]$, però no hi ha cap $x \in (0, 2)$ tal que $f'(x) = 0$. Contradiu això el teorema de Rolle?

Exercici 14.8 Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b). Demostreu:

$$f'(x) = 0 \ \forall\, x \in (a, b) \iff f(x) = k \ \forall\, x \in [a, b]$$

Exercici 14.9 Demostreu la validesa de les desigualtats següents per a tot $x \geq 0$:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Exercici 14.10 Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció derivable. Demostreu que si f' és estrictament creixent, aleshores

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Doneu una interpretació geomètrica d'aquest resultat.

Exercici 14.11 Escriviu la fórmula de Taylor amb residu per les funcions següents ens els punts indicats. Fent $n = 6$, estimeu la magnitud del residu en cada cas.

a) e^x en el punt 0, i també en el punt a.

b) $\ln(1 + x)$ en el punt 0.

Exercici 14.12 Demostreu que si una funció f és parell aleshores $f'(x) = -f'(-x)$, i que si és senar aleshores $f'(x) = f'(-x)$. Utilitzeu aquest fet per demostrar que si f és parell el seu desenvolupament de Taylor en el punt 0 només té potències parells de x, mentre que si és senar només en té de senars (suposeu l'existència de les derivades necessàries).

Exercici 14.13 Sigui $f(x) = e^x - 1 - 2x$.

a) Calculeu els màxims i els mínims de f.

b) Són absoluts o relatius?

c) Quantes arrels té aquesta funció?

d) Aproximeu les arrels amb un error més petit que 1/10.

Exercici 14.14 Estudieu els extrems absoluts i relatius de $x^3 + 3px + q$.

14.4 Diferenciació de funcions de diverses variables

14.4.1 Diferencial

14.4.1.1 Definició de funció diferenciable

Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, i $a \in \dot{D}$ (de fet, n'hi hauria prou que $a \in D \cap D'$). Es diu que la funció f és *diferenciable* en el punt a si, i només si, existeix una aplicació lineal $Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

14.4.1.2 Diferencial. Matriu jacobiana

En aquest cas, l'aplicació lineal $Df(a)$ s'anomena *diferencial* de f en a, i la seva matriu s'anomena matriu *jacobiana* de f en a, i es denota $Jf(a)$.

14.4.1.3 Interpretació geomètrica

La interpretació geomètrica de la diferencial és ben coneguda en dimensió 1 ($n = 1$, $m = 1$) on, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la seva diferencial en un punt a és

$$\begin{array}{rccc} Df(a): & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(a)x \end{array}$$

i f s'aproxima, en un entorn del punt a, per la seva recta tangent: $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ o, si es prefereix, $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$.

En dimensió 2 ($n = 2$, $m = 1$), si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, aleshores la seva diferencial en un punt (a, b) és

$$\begin{array}{rccc} Df(a,b): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & Ax + By \end{array}$$

i f s'aproxima, en en entorn del punt (a, b), pel seu pla tangent: $f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + Ah + Bk$ o, si es prefereix, $f(x,y) \approx f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)$.

En general, per a qualsevol dimensió (n qualsevol, $m = 1$), si f és diferenciable, la diferencial en un punt permet definir un hiperplà que aproxima la funció localment, en un entorn del punt.

14.4.1.4 Exemples

a) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és constant, $f(x) = c \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$, aleshores f és diferenciable a tot $\mathbb{R}^n$ amb $Df(a) = 0$ i $Jf(a) = 0$ per a tot $a \in \mathbb{R}^n$.

b) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és lineal amb matriu associada M, $f(x) = Mx$, aleshores f és diferenciable a tot $\mathbb{R}^n$ amb $Df(a) = f$ i $Jf(a) = M$ per a tot $a \in \mathbb{R}^n$.

c) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és la funció producte, $f(x,y) = xy$, aleshores f és diferenciable a tot $\mathbb{R}^2$ amb $Df(a,b)(x,y) = bx + ay$ i $Jf(a,b) = (b,a)$ per a tot $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

d) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ està definida per $f(x, y) = y^2$, aleshores f és diferenciable a tot $\mathbb{R}^2$ amb $Df(a, b) = 2by$ i $Jf(a, b) = (0, 2b)$ per a tot $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

14.4.1.5 Propietats

a) La diferencial d'una funció f en un punt a es pot calcular component a component, i les files de la matriu jacobiana de f són les matrius jacobianes de les components f_i.

b) La diferencial d'una funció f en un punt a satisfà $Df(a)(0) = 0$.

c) La diferencial d'una funció f en un punt a, $Df(a)$, és una funció contínua.

d) Si f és una funció diferenciable en a, aleshores f és contínua en a.

e) Linealitat de la diferencial: siguin $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$. Aleshores

   i) $f + g$ és diferenciable en a, i

   $$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a).$$

   ii) λf és diferenciable en a, i

   $$D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a).$$

f) Producte i quocient: siguin $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$, diferenciables en el punt $a \in \mathbb{R}^n$. Aleshores

   i) fg és diferenciable en a, i

   $$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

   ii) Si $g(a) \neq 0$, aleshores f/g és diferenciable en a, i

   $$D(f/g)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2}.$$

g) Regla de la cadena: si f és diferenciable en a i g és diferenciable en $f(a)$, aleshores $g \circ f$ és diferenciable en a, i

   $$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

   Atenció: en dimensió superior a 1, l'ordre d'aquests productes no és irrellevant!

14.4.2 Derivades parcials

14.4.2.1 Definició de derivada parcial

Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$, i $a \in \dot{D}$. La *derivada parcial* i-èsima de f en a es defineix com:

$$\begin{aligned} D_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1 \ldots, a_n)}{h}. \end{aligned}$$

Així, doncs, la derivada parcial i-èsima de f en a és la derivada de la funció d'una variable

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & a + he_i & \mapsto & f(a + he_i) \end{array}$$

en el punt $h = 0$, si existeix.

Si A és un conjunt obert i f té derivada parcial i-èsima a tots els punts d'A, aleshores es pot considerar la funció derivada parcial i-èsima:

$$\begin{array}{rccc} D_i f : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \mapsto & D_i f(a) \end{array}$$

Repetint, si és possible, el mateix procés, s'obtenen les *derivades parcials d'ordre superior*: $D_j(D_i f) = D_{ij} f$, és a dir,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Teorema de Schwarz: Si f és una funció tal que $D_{ij} f$ i $D_{ji} f$ són contínues en un obert A, aleshores $D_{ij} f = D_{ji} f$ en A.

14.4.2.2 Exemples

a) Les derivades parcials de primer i de segon ordre de la funció $f(x, y) = \sin xy^2$ es poden calcular sense dificultat. En particular, s'observa que, en aquest cas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

b) Sigui $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, i $f(0, 0) = 0$. Es pot comprovar que, en aquest cas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

14.4.2.3 Diferenciabilitat i derivades parcials

Sigui A un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$, i sigui $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Aleshores,

- f és diferenciable en $A \Longrightarrow$ existeixen $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ en A.
- f és diferenciable en $A \Longleftarrow$ existeixen $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ en A i són contínues en A.

A més,

$$Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

14.4.2.4 Exemples

a) Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y, z) = (x^4 y, xe^z)$. És fàcil comprovar que la seva matriu jacobiana és

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 y & x^4 & 0 \\ e^z & 0 & xe^z \end{pmatrix}.$$

b) No n'hi ha prou que una funció tingui derivades parcials perquè sigui diferenciable. Per exemple, la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} x/y, & \text{si } y \neq 0; \\ \\ 0, & \text{si } y = 0; \end{cases}$$

té derivades parcials a $(0, 0)$ i, en canvi, ni tan sols no és contínua en aquest punt (de fet, ni tal sols no és fitada en un entorn del punt).

c) Si f és diferenciable, les derivades parcials no tenen perquè ser contínues. Com exemple d'aquesta afirmació, considereu la funció següent en el punt $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

14.4.2.5 Derivades parcials i regla de la cadena

Donades dues funcions diferenciables:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$$

l'aplicació de la regla de la cadena comporta la relació següent entre les derivades parcials de les funcions f, g i $g \circ f$:

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \qquad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, p.$$

14.4.2.6 Exemple

Considerem la funció $f(x,y) = xy$. Si li apliquem el canvi de variables $x = u+v$, $y = u-v$, la funció resultant és $g(u,v) = (u+v)(u-v)$. És fàcil comprovar que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 2u = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = -2v = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

14.4.2.7 (Hiper)pla tangent a una superfície, vector tangent a una corba

Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($m = 1$) és una funció diferenciable en un punt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \dot{D}$, l'hiperplà tangent a f en el punt a té equació

$$x_{n+1} - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i).$$

Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ ($n = 1$) és una funció diferenciable en un punt $a \in \dot{D}$, el vector tangent a la corba f en el punt a és

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df_m}{dt} \end{pmatrix}.$$

14.4.3 Derivades direccionals

14.4.3.1 Definició

Siguin $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($m = 1$), $a \in \dot{D}$, i v un vector de $\mathbb{R}^n$ de norma 1. La *derivada direccional* de f en el punt a segons la direcció de v és

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

14.4.3.2 Diferenciabilitat i derivades direccionals

Si f és diferenciable al conjunt obert A, aleshores existeixen totes les derivades direccionals de f en el punt a, i són $D_v f(a) = Df(a)(v)$.

14.4.3.3 Exemples

a) Una funció f pot ser discontínua i, tanmateix, tenir totes les derivades direccionals en un determinat punt. Com exemple d'aquesta afirmació, podeu considerar el comportament en el punt $(0,0)$ de la funció $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y}$ quan $x^2 \neq -y$, $f(x,y) = 0$ quan $x^2 = -y$.

b) Una funció f pot tenir totes les derivades direccionals i, tanmateix, no ser diferenciable. Com exemple d'aquesta afirmació, podeu considerar el comportament en el punt $(0,0)$ de la funció $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ quan $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

c) Una funció f pot ser diferenciable i tenir totes les derivades direccionals, però aquestes no tenen perquè ser contínues. Com exemple d'aquesta afirmació, podeu considerar el comportament en el punt $(0,0)$ de la funció $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ quan $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

14.4.3.4 Vector gradient

Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$. El vector gradient de f en el punt a és

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

El vector gradient es caracteritza pels fets següents:

- El creixement màxim de la funció f es dóna en la direcció del seu gradient.
- La direcció ortogonal al gradient és de creixement nul (el gradient és ortogonal a les corbes/superfícies de nivell de f).

Aquestes afirmacions es basen el el fet que $D_v f(a) = Df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v = \|\nabla f(a)\| \|v\| \cos\theta$, on θ és l'angle que formen $\nabla f(a)$ i v. Aquesta expressió assoleix el seu màxim (respectivament, mínim) quan $\cos\theta = 1$ (resp., $\cos\theta = 0$), és a dir, quan v té la mateixa direcció que el gradient (resp. és ortogonal al gradient).

14.4.4 El teorema de Taylor

14.4.4.1 Desenvolupaments de Taylor

Sigui $a \in A$, un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$, i sigui $x \in A$ tal que el segment $\overline{xa}$ està contingut dins A. Suposem que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$ té derivades parcials contínues fins a ordre $r+1$ en A. Aleshores existeix un valor $t \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \tfrac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} D_i f(a)(x_i - a_i) \\ &\quad + \tfrac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2=1}^{n} D_{i_1 i_2} f(a)(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \\ &\quad \ldots \\ &\quad + \tfrac{1}{r!}\sum_{i_1 \ldots i_r=1}^{n} D_{i_1 \ldots i_r} f(a)(x_{i_1} - a_{i_1}) \ldots (x_{i_r} - a_{i_r}) \\ &\quad + \tfrac{1}{(r+1)!}\sum_{i_1 \ldots i_{r+1}=1}^{n} D_{i_1 \ldots i_{r+1}} f(a + t(x-a))(x_{i_1} - a_{i_1}) \ldots (x_{i_{r+1}} - a_{i_{r+1}}). \end{aligned}$$

La notació mnemotècnica que s'empra habitualment és:

$$\begin{aligned}
&D^0 f(a) = f(a)\\
&D^1 f(a)(x-a) = Df(a)(x-a)\\
&D^2 f(a)(x-a)^2 = (D^1 f(a)(x-a))^2\\
&\dots\\
&D^r f(a)(x-a)^r = (D^1 f(a)(x-a))^r
\end{aligned}$$

D'aquesta manera, el teorema de Taylor s'expressa dient que existeix un valor $t \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
f(x) \quad = \quad & D^0 f(a)\\
& +D^1 f(a)(x-a)\\
& +\tfrac{1}{2!} D^2 f(a)(x-a)^2\\
& \dots\\
& +\tfrac{1}{r!} D^r f(a)(x-a)^r\\
& +\tfrac{1}{(r+1)!} D^{r+1} f(a+t(x-a))(x-a)^{r+1},
\end{aligned}$$

o bé:

$$\begin{aligned}
f(a+h) \quad = \quad & D^0 f(a)\\
& +D^1 f(a)h\\
& +\tfrac{1}{2!} D^2 f(a)h^2\\
& \dots\\
& +\tfrac{1}{r!} D^r f(a)h^r\\
& +\tfrac{1}{(r+1)!} D^{r+1} f(a+th)h^{r+1}\\
= \quad & \sum_{i=0}^{r} \tfrac{1}{i!} D^i f(a)h^i + \tfrac{1}{(r+1)!} D^{r+1} f(a+th)h^{r+1}
\end{aligned}$$

14.4.4.2 Matriu hessiana

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$, l'expressió del terme de grau 1 del desenvolupament de Taylor de f és:

$$D^1 f(a)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{array} \right).$$

Considerem ara l'expressió del terme següent del desenvolupament de Taylor de f:

$$\begin{aligned}
D^2 f(a)h^2 \quad &= \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j\\
&= \quad \left(\begin{array}{ccc} h_1 & \dots & h_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{array} \right).
\end{aligned}$$

La matriu que apareix a l'expressió anterior, $Hf(a)$, s'anomena *matriu hessiana* de la funció f en el punt a.

En el cas que les funcions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ són contínues, la matriu $Hf(a)$ és simètrica. Així com $Jf(a)$ és la matriu d'una aplicació lineal, $Hf(a)$ és la matriu d'una forma quadràtica.

14.5 Optimització de funcions de diverses variables

En aquest capítol es consideren funcions amb valors reals, és a dir, funcions $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, (amb $m = 1$). Per simplicitat, es considera que els dominis A de les funcions estudiades són conjunts oberts.

14.5.1 Extrems relatius o locals

14.5.1.1 Extrems absoluts Una funció f té un *màxim (mínim) absolut* en un punt a sii

$$\forall\, x \in \mathrm{Dom} f \quad f(x) \leq f(a). \qquad (\text{resp. } \geq)$$

Els màxims i mínims absoluts s'anomenen *extrems* o *òptims absoluts* o *globals.*

14.5.1.2 Extrems relatius o locals Una funció f té un *màxim (mínim) local* o *relatiu* en un punt a sii

$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in B_r(a) \cap \mathrm{Dom} f \quad f(x) \leq f(a). \qquad (\text{resp. } \geq)$$

Els màxims i mínims locals s'anomenen *extrems* i també *òptims locals* o *relatius.*

14.5.1.3 Punts crítics Un *punt crític* d'una funció f és un punt a on $Df(a) = 0$, o sigui, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0\ \forall i$.

14.5.1.4 Condició necessària de primer ordre Sigui f una funció diferenciable en un punt a. Si f té un extrem local en a, aleshores f té un punt crític en a.

Aquesta afirmació és de comprovació immediata si es considera la restricció de f a cadascuna de les rectes que passen per a.

Cal tenir en compte, però, que el recíproc no es cert, tal com es pot comprovar en els dos exemples següents: $f(x, y) = xy$, i $g(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Els punts crítics que no són extrems locals s'anomenen *punts de sella.*

14.5.1.5 Condició suficient de segon ordre Sigui f una funció diferenciable dos cops amb continuïtat, i sigui a un punt crític de f. Considerem $Hf(a)$, la matriu hessiana de f en el punt a:

a) Si $Hf(a)$ és definida positiva, aleshores f té un mínim en a.

b) Si $Hf(a)$ és definida negativa, aleshores f té un màxim en a.

c) Si $Hf(a)$ és indefinida, aleshores f té un punt de sella en a.

d) Si $Hf(a)$ és semidefinida, aquest criteri no decideix.

Aquesta afirmació es demostra fent el desenvolupament de Taylor fins a ordre 2 de la funció f en el punt a: $f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2}D^2f(a+th)h^2 = f(a) + 0 + \frac{1}{2}h^T Hf(a+th)h$, i tenint en compte que, en un entorn del punt a, el darrer sumand té el mateix signe que en a.

14.5.2 Extrems condicionats

A moltes aplicacions, els problemes d'optimització es presenten en termes de cerca d'extrems absoluts sobre dominis amb restriccions. Per exemple, en l'àmbit de l'economia, si una empresa fabrica dos productes A i B, i anomenem x el nombre d'unitats del producte A que produeix en un cert període de temps, i y el nombre d'unitats del producte B, és habitual que l'empresa vulgui maximitzar la funció $f(x,y) = x+y$. Però aquesta maximització s'ha de fer sota certes restriccions, com per exemple $x \geq 0$, $y \geq 0$ i $ax+by \leq c$, on a és el cost de producció per unitat d'A, b és el cost de producció per unitat de B, i c és el cost total que l'empresa es pot permetre. En aquest context, doncs, l'empresa vol trobar el màxim absolut de la funció f en el domini definit per les restriccions esmentades.

Això es fa calculant, d'una banda, els òptims locals a l'interior de la regió definida per les restriccions i, de l'altra, calculant els òptims locals a la frontera (la qual cosa comporta resoldre el problema en dimensió inferior). Posteriorment, es comparen tots els òptims locals trobats, per trobar l'òptim absolut. La tasca de trobar els òptims relatius a la frontera no sempre és senzilla, tot depèn de les restriccions del problema i la seva expressió. Si en voleu saber més, consulteu a la bibliografia el Teorema dels multiplicadors de Lagrange.

14.6 Exercicis

Exercici 14.15 Comproveu si f és o no diferenciable, i calculeu la seva matriu jacobiana:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercici 14.16 Estudieu la continuïtat, l'existència de derivades parcials i la diferenciabilitat en $(0,0)$ de les funcions següents:

a) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

b) $f(x,y) = x \sin \frac{1}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

c) $f(x,y) = e^{x+y}$.

d) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

e) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Exercici 14.17 Donada la funció $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(x,y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

proveu que f presenta una discontinuïtat evitable en $(0,0)$. Definiu adequadament $f(0,0)$ i estudieu les derivades direccionals i la derivabilitat de f en $(0,0)$.

Exercici 14.18 Determineu l'equació del pla tangent a la quàdrica d'equació $3x^2 - y^2 + 2xy - 3xz = 6$ en el punt $(-1,0,1)$.

Exercici 14.19 Verifiqueu la regla de la cadena per a $f(u,v,w) = u^2v + wv^2$, amb $u = xy$, $v = \sin x$, $w = e^x$.

Exercici 14.20 Siguin $f(x,y,z,t) = (xy, z+t)$ i $g(x,y) = (x^2, x+y^2, y^3)$. Verifiqueu la regla de la cadena per a la funció $g \circ f$.

Exercici 14.21 Si $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ i $g(x,y) = xy$, calculeu $D_{xx}(g \circ f)$, $D_{xy}(g \circ f)$, $D_{yx}(g \circ f)$ i $D_{yy}(g \circ f)$.

Exercici 14.22 Trobeu els punts (x,y) i les direccions per les quals la derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ té valor màxim, suposant que (x,y) compleix $x^2 + y^2 \leq 1$.

Exercici 14.23 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punt $P \in \mathbb{R}^2$. Suposem que $D_v f(P) = \sqrt{13}$ i $D_w f(P) = \sqrt{2}/2$, essent $v = (2,3)/\sqrt{13}$ i $w = (1,1)/\sqrt{2}$.

a) Calculeu $\nabla f(P)$.

b) Representeu el conjunt de totes les direccions u tals que $D_u f(P) = 6$.

c) Calculeu el màxim de les derivades direccionals de f sobre P.

Exercici 14.24 Feu el desenvolupament de Taylor fins a ordre 3 de la funció $f(x,y) = e^x \cos y$ a l'origen.

Exercici 14.25 Feu el desenvolupament de Taylor de les funcions següents:

a) $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$ en potències de $x-1$ i $y-2$.

b) $g(x,y) = \ln(x+y)$, amb $x, y > 0$, al voltant del punt $(1,1)$.

c) $h(x,y,z) = e^{a(x+y+z)}$, amb $a \neq 0$, al voltant del punt $(0,0,0)$.

Exercici 14.26 Trobeu els punts crítics de les funcions següents, i determineu la seva natura:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$,

b) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$,

c) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$,

d) $f(x,y) = 9x^2 + 6xy + y^2 + 12x + 4y$,

e) $f(x,y) = (x + y - 1)(x^4 + y^4)$,

f) $f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$,

g) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$,

Exercici 14.27 Calculeu els extrems relatius de les funcions següents:

a) $f(x,y) = x^2y^2(1 - x - y)$,

b) $f(x,y) = x^3 - x^2y + 3y^2$,

c) $f(x,y) = \sin x \sin y$,

d) $f(x,y) = (a\cos x + b\cos y)^2 + (a\sin x + b\sin y)^2$,

e) $f(x,y) = (x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)^2$,

f) $f(x,y) = xy^2(3 - x - y)$,

g) $f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$,

h) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$,

i) $f(x,y) = (x - 1)^4 + (x - y)^4$,

j) $f(x,y) = y^2 - x^3$,

k) $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

Exercici 14.28 Siguin $a > b > 0$. Demostreu que la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ té extrems absoluts. Calculeu-los.

15 Les sumes amb infinits sumands

Un pastís es divideix en dues meitats. Una de les meitats, a la seva vegada, es divideix en dues meitats. Dels quarts resultants, un es divideix en dues meitats. Dels octaus resultants, un es divideix en dues meitats. I així successivament.

Aquest procés es pot anar reproduint indefinidament (des d'un punt de vista teòric), portant-nos a la conclusió que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1,$$

és a dir, que el resultat de sumar infinits termes pot ser un nombre finit. Aquest capítol es dedica íntegrament a l'estudi de les sumes d'infinits sumands, tant si es tracta d'infinit numerable (cas discret, suma de sèries) com d'infinit continu (cas continu, integrals).

15.1 El cas discret: suma de sèries

15.1.1 Sèries numèriques

El cas més bàsic de suma de sèries és el de les sèries numèriques, que estén el concepte de suma a un conjunt infinit (numerable) de nombres reals.

15.1.1.1 Definició

Sigui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de nombres reals. La suma (finita) dels primers termes de la successió, $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, s'anomena *suma parcial n-èsima* de la sèrie corresponent a la successió $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mentre que a_n es denomina *terme n-èsim* de la sèrie.

Es diu que la sèrie és *convergent* (o *sumable*) si la successió $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ té límit finit i, en aquest cas, el límit de la successió de les sumes parcials s'anomena *suma de la sèrie*. Altrament, es diu que la sèrie *divergeix*.

En qualsevol dels dos casos, la sèrie es denota

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{o també} \qquad \sum_{n\geq 0} a_n.$$

Desgraciadament, aquesta notació denota tant la sèrie com la seva suma, quan existeix, però ambdós conceptes no s'han de confondre.

15.1.1.2 Exemple: la sèrie geomètrica

La sèrie $\sum_{n\geq 0} r^n$ convergeix si, i només si, $|r|<1$, i en aquest cas la seva suma és $\frac{1}{1-r}$.

15.1.1.3 Propietats de les sèries convergents i la seva suma

a) $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent si, i només si, $\sum_{n\geq n_0} a_n$ és convergent.

En aquest cas, $\sum_{n\geq 0} a_n = a_0 + \ldots + a_{n_0-1} + \sum_{n\geq n_0} a_n$.

b) Si $\sum a_n$ és convergent, aleshores $\lim a_n = 0$. El recíproc no és cert.

c) Si $\sum a_n$ i $\sum b_n$ són ambdues convergents, aleshores $\sum(a_n + b_n)$ és convergent i $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

d) Si $\sum a_n$ és convergent i $c \in \mathbb{R}$, aleshores $\sum ca_n$ és convergent i $\sum ca_n = c \sum a_n$.

15.1.1.4 Propietats de les sèries de termes positius

Una sèrie $\sum a_n$ s'anomena de termes positius si $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $a_n, b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, es tenen les propietats següents:

a) La sèrie $\sum a_n$ és convergent si, i només si, la successió $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ està fitada.

b) Si $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$, aleshores:

- $\sum b_n$ és convergent $\Longrightarrow \sum a_n$ és convergent.
- $\sum a_n$ és divergent $\Longrightarrow \sum b_n$ és divergent.

c) Si $\exists \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$, aleshores:

- Si $l \in \mathbb{R}$ i $l \neq 0$, aleshores: $\sum a_n$ és convergent $\Longleftrightarrow \sum b_n$ és convergent.
- Si $l = 0$, aleshores: $\sum b_n$ és convergent $\Longrightarrow \sum a_n$ és convergent.
- Si $l = \infty$, aleshores: $\sum a_n$ és convergent $\Longrightarrow \sum b_n$ és convergent.

15.1.1.5 Exemple: la sèrie harmònica

La sèrie $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ és divergent.

15.1.1.6 Propietats de les sèries alternades

S'anomenen *sèries alternades* les dels tipus $\sum(-1)^n a_n$ i $\sum(-1)^{n+1} a_n$, amb $a_n \geq 0$.

La propietat més destacada de les sèries alternades és la següent:

a) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ És una successió decreixent que tendeix a zero, aleshores la sèrie alternada $\sum(-1)^n a_n$ és convergent.

A més, en aquest cas la diferència entre la suma de la sèrie i qualsevol de les seves sumes parcials es pot fitar així:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n \right| \leq a_{N+1}.$$

La demostració d'aquest resultat comença observant que la subsuccessió de les sumes parcials parells és decreixent: $s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2}$. I també és fitada inferiorment i de termes positius: $s_{2n} = a_0 - a_1 + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geq a_0 - a_1$. Per tant, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ és convergent amb límit s. Quant a la successió de les sumes parcials senars, $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, de manera que també és convergent de mateix límit: $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} - \lim a_{2n+1} = s + 0 = s$. Quant a la diferència entre la suma i les sumes parcials,

$$\begin{aligned} |s - s_n| &= |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) \ldots| \\ &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) \ldots \\ &= a_{n+1} + (-a_{n+2} + a_{n+3}) + (-a_{n+4} + a_{n+5}) + \ldots \\ &\leq a_{n+1}. \end{aligned}$$

15.1.1.7 Exemple: aproximació de la suma de la sèrie harmònica alternada

Aplicant la propietat anterior, es fàcil veure que la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ és convergent i que, per aproximar el valor de la seva suma amb un decimal de precisió cal sumar al menys 10 termes de la sèrie.

15.1.1.8 Convergència absoluta i convergència condicional

Una sèrie $\sum a_n$ s'anomena *absolutament convergent* si la sèrie dels seus valors absoluts, $\sum |a_n|$, és convergent.

Tota sèrie absolutament convergent és convergent. Això es demostra considerant, per cada suma parcial s_n de la sèrie, la suma s_n^+ dels seus termes positius i la suma s_n^- dels valors absoluts dels seus termes negatius, i demostrant que ambdues són convergents.

El recíproc no és cert: com demostra la sèrie harmònica alternada, no tota sèrie convergent és absolutament convergent.

Quan una sèrie és convergent però no és absolutament convergent, es diu que la sèrie és *condicionalment convergent.* Aquesta terminologia es deu a la propietat següent:

a) Si $\sum a_n$ és una sèrie absolutament convergent, aleshores tota reordenació $\sum b_n = \sum a_{\sigma(n)}$ de $\sum a_n$ és (absolutament) convergent i $\sum b_n = \sum a_n$.

b) Si $\sum a_n$ és una sèrie condicionalment convergent, aleshores, per a tot $c \in \mathbb{R}$ existeix una reordenació $\sum b_n$ de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n = c$.

La demostració d'aquestes afirmacions és una mica enrevessada, però no és res més que un exercici tècnic.

Aquest resultat indica que la propietat commutativa de la suma (finita) de nombres reals no s'estén a les sumes infinites, excepte quan la convergència és absoluta.

En canvi, la propietat associativa s'estén sense problemes a totes les sèries convergents:

a) Si $\sum a_n$ és convergent, aleshores qualsevol sèrie $\sum b_n$ obtinguda agrupant termes (consecutius) de $\sum a_n$ és convergent, i $\sum b_n = \sum a_n$.

15.1.2 Sèries de potències

En aquest apartat s'estudien les sèries de potències, que no són més que la generalització del concepte de polinomi (suma finita de monomis) al cas de la suma infinita (numerable) de monomis.

15.1.2.1 Definició

Una *sèrie de potències centrada a l'origen* és:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Una *sèrie de potències centrada al punt a* és:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

15.1.2.2 Exemple

Un resultat anterior ens permet afirmar que la sèrie de potències $\sum x^n$ és absolutament convergent per $|x| < 1$, i és divergent per $|x| > 1$, per $x = 1$ i per $x = -1$.

15.1.2.3 Radi i interval de convergència

Es defineix el *radi de convergència* R d'una sèrie de potències $\sum a_n x^n$ de la manera següent:

- Si $\sum a_n x^n$ sols convergeix per $x = 0$, aleshores $R = 0$.
- Si $\sum a_n x^n$ convergeix $\forall x \in \mathbb{R}$, aleshores $R = +\infty$.
- Altrament, $R = \sup\{|x| \mid \sum a_n x^n \text{ és convergent}\}$.

Aleshores, l'interval $(-R, R)$ s'anomena *interval de convergència* de la sèrie $\sum a_n x^n$.

La propietat següent de les sèries de potències és fonamental per entendre què significa l'interval de convergència d'una sèrie:

a) Si $\sum a_n x^n$ és convergent per $x = x_0$, aleshores és absolutament convergent per tot x tal que $|x| < |x_0|$.

b) Si $\sum a_n x^n$ és divergent per $x = x_1$, aleshores és divergent per tot x tal que $|x| > |x_1|$.

La demostració d'aquesta propietat és com segueix. Si $\sum a_n x_0^n$ és convergent, aleshores $\lim a_n x_0^n = 0$ i, per tant, la successió $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ està fitada. Sigui, doncs M tal que $|a_n x_0^n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Escrivim $|a_n x^n| = |a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}| = |a_n x_0^n| |\frac{x}{x_0}|^n \leq M |\frac{x}{x_0}|^n$. Com que $|x| < |x_0|$, aleshores $|\frac{x}{x_0}| < 1$ i la sèrie de potències $\sum M |\frac{x}{x_0}|^n$ és convergent, és a dir, $\sum |a_n x^n|$ és convergent.

De la propietat anterior es dedueix el resultat següent:

Si R és el radi de convergència d'una sèrie de potències $\sum a_n x^n$, aleshores la sèrie és absolutament convergent $\forall x \in (-R, R)$ i és divergent $\forall x$ tal que $|x| > R$. (El comportament de la sèrie en els punts $x = R$ i $x = -R$ pot variar en cada cas: no el regeix una regla general).

15.1.2.4 Propietats de les sèries de potències

Considerem $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ una funció definida a $(-R, R)$ per una sèrie de potències amb radi de convergència $R \neq 0$. Es tenen les propietats següents:

a) **Continuïtat.** La funció $f(x)$ és contínua a $(-R, R)$.

b) **Derivabilitat.** La funció $f(x)$ és infinitament derivable a $(-R, R)$.

c) **Expressió de les derivades.** La derivada de f també és una sèrie de potències:

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} a_n n x^{n-1} \quad \forall x \in (-R, R).$$

I les derivades successives també:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} a_n n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} \quad \forall x \in (-R, R).$$

d) **Expressió dels coeficients.** $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

15.1.2.5 Sèries de Taylor

Si f és infinitament diferenciable en x_0, s'anomena *sèrie de Taylor* de f en x_0 la sèrie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Observeu que es tracta de la generalització del polinomi de Taylor.

Teorema de Taylor. Si f és infinitament diferenciable en x_0 i el residu de Taylor de f en x_0 tendeix a zero, $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$, aleshores $f(x)$ coincideix amb la seva sèrie de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

15.1.2.6 Exemple

La funció exponencial es pot desenvolupar en sèrie de Taylor:

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

15.1.3 Exercicis

Exercici 15.1 Digueu si les sèries següents són convergents o divergents:

a) $\sum \dfrac{1}{n^n}$

b) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\sum \dfrac{3\sqrt{3n-5}}{\sqrt{7n^3-9n+6}}$

d) $\sum \dfrac{\ln n}{n}$

e) $\sum \dfrac{1}{2n-1}$

Exercici 15.2 Demostreu que la suma de les sèries següents és la que s'indica:

a) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

b) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{2}{3^{n-1}} = 3$

c) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

Exercici 15.3 Fiteu l'error que es produeix en substituir la suma de la sèrie $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n!}$ per la suma dels n primers termes. En particular, calculeu-lo per a $n = 10$.

Exercici 15.4 Desenvolupeu les funcions següents en sèrie de Taylor centrada en el punt indicat:

a) $f(x) = a^x$ en el punt 0.

b) $f(x) = \ln(1+x)$ en el punt 0.

c) $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ en el punt 0. Quina relació tenen aquests desenvolupaments amb el de la funció $h(x) = e^x$?

d) $f(x) = \ln(1-x)$ en el punt 0.

e) $f(x) = e^x$ en el punt 1.

15.2 El cas continu: integrals

15.2.1 Integrals pròpies

15.2.1.1 Objectiu i definició

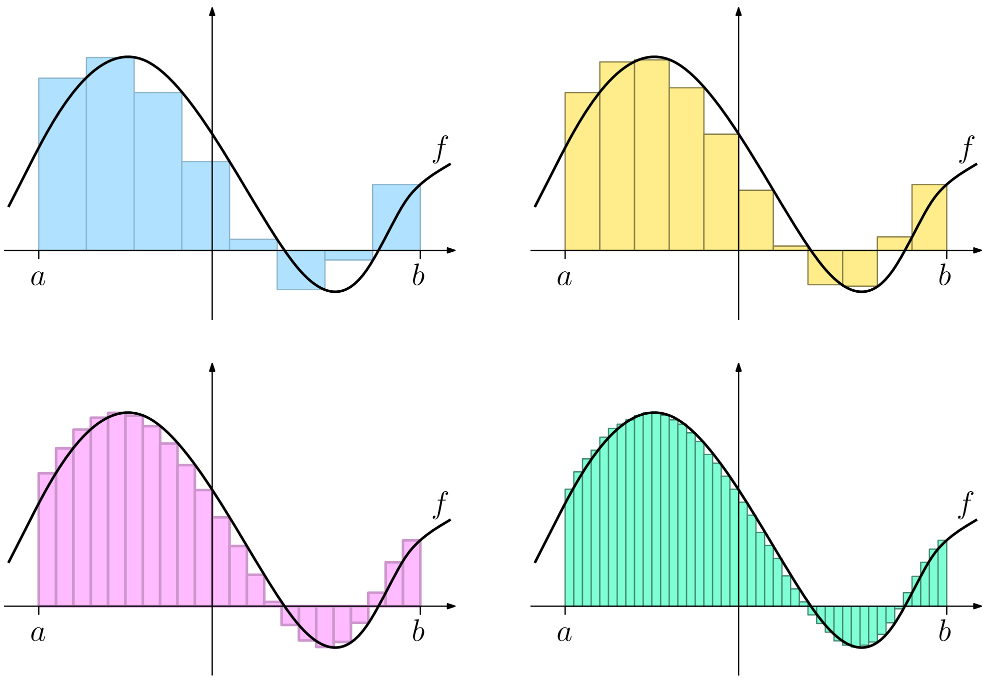
Les integrals no són més que el cas continu de les sumes infinites. Aquí ja no es tracta de sumar una quantitat numerable de valors, sinó de sumar-ne una quantitat contínua.

Donada una funció f definida i fitada en un interval tancat i fitat $[a, b]$, la seva integral $\int_a^b f(x)\,dx$ vol ser la suma dels valors $f(x)$ per a tots els (infinits) valors possibles de $x \in [a, b]$.

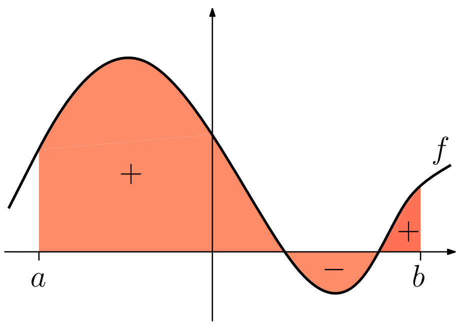
La integral d'una funció f definida en un interval $[a, b]$ s'escriu $\int_a^b f(x)\,dx$ i es defineix com el límit, quan n tendeix a infinit, de la suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, on $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ i t_i és qualsevol nombre dins $[x_{i-1}, x_i]$, sempre que aquest límit existeixi. Observeu l'etimologia de la notació:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\,\Delta x.$$

La figura següent il·lustra el resultat d'aquesta suma per a diversos valors de n, prenent com a t_i l'extrem dret de cada interval $[x_{i-1}, x_i]$.



La integral d'una funció f sobre un interval $[a, b]$ es pot interpretar geomètricament com l'àrea, afectada de signe, de la porció del pla limitada per l'eix de les abscisses, la funció i les rectes verticals $x = a$ i $x = b$.



15.2.1.2 Altres definicions de la integral

Hi ha diverses maneres de definir aquest mateix concepte. La que hem presentat a l'apartat anterior es coneix com definició per sumes de Riemann. També es sol considerar la definició per sumes inferiors i superiors, és a dir, per sumes on en lloc d'emprar un valor $f(t_i)$ amb $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ escollit de forma arbitrària, es tria t_i de manera que $f(t_i) = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ o que $f(t_i) = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, i aleshores es diu que f és integrable si el suprem de les sumes inferiors (sobre totes les particions possibles de l'interval $[a, b]$) i l'ínfim de les sumes superiors coincideixen. Altres definicions del concepte d'integral (com ara la definició d'integral de Lebesgue) es basen en conceptes diferents, però l'objectiu és sempre el mateix.

15.2.1.3 Exemples

a) Tota funció constant $f(x) = k$ és integrable en qualsevol interval tancat i fitat $[a, b]$ ja que, per a qualsevol partició $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de l'interval $[a, b]$ es té $\sum_{i=0}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k(x_n - x_0) = k(b - a)$.

b) $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ per a qualsevol interval tancat i fitat $[a, b]$ ja que, prenent una partició equidistribuïda, es té:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} (x_1 + x_n)\frac{n}{2}\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{b-a}{n} + b\right) \frac{b-a}{2} = (a+b)\frac{b-a}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.
\end{aligned}$$

15.2.1.4 Teorema fonamental del càlcul

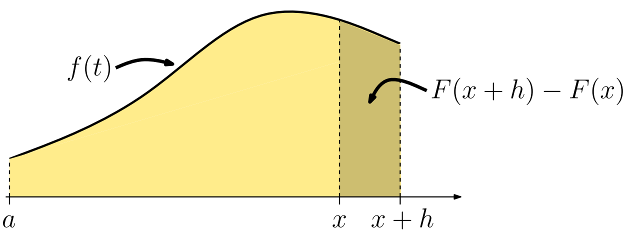
Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$. Podem definir la *funció integral* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Aleshores resulta que F és contínua. Si, a més, f era contínua, aleshores F és derivable i $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in [a, b]$. En altres paraules,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

D'altra banda, si existeix $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G' = f$, aleshores

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

La primera d'aquestes dues afirmacions no és difícil de demostrar formalment, però és encara més interessant pensar-la geomètricament. Observant la figura següent, i tenint en compte que $F'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$, no hauria de ser difícil:



La segona es dedueix de la primera, com segueix. Com que $G' = f$ i $F' = f$, les funcions G i F sols difereixen en una constant, $F(x) = G(x) + k$. Aquesta constant k es pot calcular tot avaluant F i G en un punt prou conegut. Concretament, sabem que $0 = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) = G(a) + k$, d'on es dedueix que $k = -G(a)$. Per tant, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) + k = G(b) - G(a)$.

15.2.1.5 Propietats de les integrals

Algunes de les propietats de les integrals són anàlogues a les de les derivades ja que, com hem vist, integrar i derivar són, en un cert sentit, operacions inverses. Concretament:

a) Si f és integrable en $[a, b]$ i $c \in (a, b)$, aleshores f és integrable en $[a, c]$ i en $[c, b]$ i
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_v^b f(x)\,dx.$$

b) Si f i g són integrables en $[a, b]$, aleshores $f + g$ és integrable en $[a, b]$ i
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

c) Si f és integrable en $[a, b]$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores λf és integrable en $[a, b]$ i
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

d) Si f i g són integrables en $[a, b]$, aleshores fg és integrable en $[a, b]$.

e) Si $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ és integrable i $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua, aleshores $g \circ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és integrable.

f) Si f és integrable en $[a, b]$ i $\forall x \in [a, b]$ es té $f(x) \geq 0$, aleshores $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

g) Si f i g són integrables en $[a, b]$ i $\forall x \in [a, b]$ es té $f(x) \leq g(x)$, aleshores
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

h) Si f és integrable en $[a, b]$ i $\forall x \in [a, b]$ es té $m \leq f(x) \leq M$, aleshores

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

15.2.1.6 Taula de derivades/primitives immediates

a) Si $f(x) = x^r$, on $r \in \mathbb{R}$, aleshores $f'(x) = rx^{r-1}$.

b) Si $f(x) = e^x$, aleshores $f'(x) = e^x$.

c) Si $f(x) = \ln x$, aleshores $f'(x) = \frac{1}{x}$.

d) Si $f(x) = \sin x$, aleshores $f'(x) = \cos x$.

e) Si $f(x) = \cos x$, aleshores $f'(x) = -\sin x$.

f) Si $f(x) = \tan x$, aleshores $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

g) Si $f(x) = \arcsin x$, aleshores $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

h) Si $f(x) = \arccos x$, aleshores $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

i) Si $f(x) = \arctan x$, aleshores $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

15.2.1.7 Altres teoremes sobre integració de funcions

És útil saber que determinades funcions són integrables, tot i que no sempre sigui fàcil calcular-ne la integral sobre un determinat interval. En particular:

- Tota funció monòtona en un interval tancat i fitat és integrable en aquest interval.
- Tota funció contínua en un interval tancat i fitat és integrable en aquest interval.

De vegades, també poden ser útils algunes altres propietats, com ara les següents.

Teorema del valor intermedi per a integrals. Si f és contínua en $[a, b]$, aleshores existeix algun $t \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(t)$.

Teorema d'integració per parts. Si f i g són derivables a $[a, b]$ i f' i g' són integrables en $[a, b]$, aleshores

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

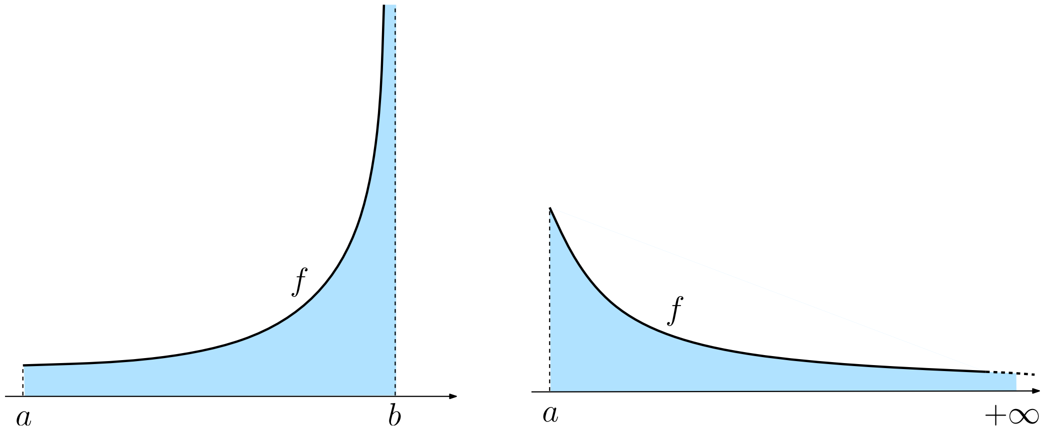
Teorema d'integració per canvi de variable. Si f és contínua en $[a, b]$ i $u : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ és integrable en $[c, d]$ i, a més, $u(c) = a$ i $u(d) = b$, aleshores

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(u(t))u'(t)\,dt.$$

15.2.2 Integrals impròpies

15.2.2.1 Objectiu

En parlar de la integrabilitat d'una funció hem demanat fins ara que f sigui fitada i ens hem restringit a intervals tancats i fitats. Les integrals impròpies estenen el concepte d'integració tot relaxant aquestes dues condicions. Això pot resultar sorprenent: té sentit parlar de l'àrea delimitada per una funció no fitada o en un interval no fitat? Pot aquesta àrea tenir un valor finit?



La resposta a totes dues preguntes és afirmativa. Això pot resultar sorprenent a primera vista, però no ho és tant si recordem que també en el cas discret les sumes infinites tenen sentit i poden donar resultats finits.

15.2.2.2 Definicions

Si f és una funció no fitada en $[a, b]$, però és integrable en $[a, c]$ per a tot $c \in [a, b)$, aleshores té sentit preguntar-nos si existeix el límit de les integrals $\int_a^c f$ quan c tendeix a b per l'esquerra i, en el cas que existeixi i sigui un nombre real, dir que la integral $\int_a^b f$ és convergent i que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Una definició anàloga val per a l'extrem a de l'interval de definició de la funció f.

Si f és una funció integrable en $[a, b]$ per a tot $b \geq a$, aleshores té sentit preguntar-nos si existeix el límit de les integrals $\int_a^b f$ quan b tendeix a $+\infty$ i, en el cas que existeixi i sigui un nombre real, dir que la integral $\int_a^{+\infty} f$ és convergent i que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Una definició anàloga val per a $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$. Finalment, es diu que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergeix si ho fan $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ i $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ per un valor arbitrari d'a.

Observeu que una sèrie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ no és més que la integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ on la funció f és esgraonada i està definida així: $f(x) = a_n$ per a tot $x \in [n, n+1)$.

15.2.2.3 Propietats de les integrals impròpies

Determinar si una integral impròpia convergeix no és tasca fàcil a partir de les definicions. Per això es solen utilitzar una sèrie de propietats. Les primers i més òbvies són les que es deriven de forma immediata de les propietats de les integrals pròpies descrites a l'apartat 15.2.1.5, ja que les impròpies no són més que límits d'aquestes. Però n'hi ha algunes més de força intuïtives i que, a més, mantenen un enorme paral·lelisme amb propietats anàlogues per a sèries. Són les següents:

a) Si f és una funció positiva (és a dir, $f(x) \geq 0$ per a tot $x \geq a$) i existeix $\int_a^b f(x)dx$ per a tot $b \geq a$, aleshores

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergeix } \iff \exists M\ \forall b \geq a\ \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

b) Si $f \leq g$ són dues funcions positives (és a dir, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per a tot $x \geq a$) i existeix $\int_a^b f(x)\,dx$ per a tot $b \geq a$, aleshores

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergeix } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergeix.}$$

A més,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

c) Si f i g són dues funcions positives i $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R} - \{0\}$, i existeixen $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ per a tot $b \geq a$, aleshores

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergeix } \iff \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergeix.}$$

A més, si $c = 0$ val la implicació $\Longrightarrow$ i, si $c = +\infty$ val la recíproca, $\Longleftarrow$.

Com és natural, propietats anàlogues existeixen per a les integrals impròpies del tipus $\int_{-\infty}^{b}$, i també per a les integrals impròpies de funcions no fitades sobre intervals tancats i fitats.

15.2.3 Exercicis

Exercici 15.5 Per a cadascuna de les funcions f següents, digueu quina és la funció $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dibuixeu esquemàticament les gràfiques de f i de F en cada cas:

a) $f(x) = c, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x \neq b; \\ c+1, & \text{si } x = b. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x < b; \\ c+1, & \text{si } x \geq b. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x \leq b; \\ -c-1, & \text{si } x > b. \end{cases}$

e) $f(x) = |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}; \ \ a = 0$.

f) $f(x) = \lfloor x \rfloor, \ \forall x \in \mathbb{R}; \ \ a = 0$.

Exercici 15.6 Calculeu

$$\int_{-3}^{3} |x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x| \, dx.$$

Exercici 15.7 Escriviu amb precisió l'enunciat de les propietats de les integrals impròpies que es dedueixen de les propietats de les integrals pròpies descrites a l'apartat 15.2.1.5, i expliqueu el seu perquè.

Exercici 15.8 Digueu si la integral següent convergeix:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Exercici 15.9 Calculeu:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Bibliografia

- André I. Khuri, Advanced Calculus with Applications in Statistics, Wiley, 1993.

  Es tracta d'un llibre de text d'anàlisi matemàtica pensat per a estudiants d'estadística. Inclou tots els temes exposats en aquesta part de l'assignatura, i molt més. Conté alguns exemples provenint del camp de l'estadística, així com dos capítols específicament dedicats a aplicacions estadístiques.