Màster en Estadística i Investigació Operativa

Matemàtiqus

Àlgebra lineal

Vera Sacristán

Departament de Matemàtica Aplicada II
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

4 Espais vectorials 50
4.1 Espai vectorial . . . 50
4.2 Combinacions lineals . . . 51
4.3 Independència lineal . . . 51
4.4 Base d'un espai vectorial . . . 51
4.5 Coordenades . . . 51
4.6 Dimensió . . . 51
4.7 Subespai vectorial . . . 52
4.8 Aplicació lineal . . . 53
4.9 Exercicis . . . 54

5 Operacions amb matrius 55
5.1 Matrius . . . 55
5.2 Suma de matrius . . . 55
5.3 Producte d'una matriu per un escalar . . . 56
5.4 Producte d'una matriu per un vector . . . 57
5.5 Producte de matrius . . . 57
5.6 Transposició de matrius . . . 59
5.7 Altres operacions amb matrius . . . 59
5.8 Exercicis . . . 60

6 Les aplicacions més clàssiques 62
6.1 Expressió matricial d'una aplicació lineal . . . 62
6.2 Expressió matricial dels sistemes d'equacions lineals . . . 64
6.3 Exercicis . . . 64

7 Expressió matricial dels canvis de base 66
7.1 Expressió d'un vector en bases diferents . . . 66
7.2 Expressió d'una aplicació lineal en bases diferents . . . 68
7.3 Exercicis . . . 69

8 Transformacions elementals. Aplicació al càlcul de rangs, determinants i solucions de sistemes d'equacions lineals 70
8.1 Rang d'una matriu . . . 70
8.2 Transformacions elementals d'una matriu . . . 70
8.3 Formes reduïdes . . . 73
8.4 Discussió i solució de sistemes d'equacions lineals . . . 74
8.5 Determinant d'una matriu . . . 75
8.6 Exercicis . . . 77

9 Valors i vectors propis. Formes canòniques d'una matriu 80
9.1 Vectors i valors propis . . . 81
9.2 Diagonalització i triangulació de matrius . . . 81
9.3 Exercicis . . . 82

10 Formes bilineals i quadràtiques. Mètrica **86**
10.1 Definició 86
10.2 Expressió matricial de les formes bilineals 86
10.3 Formes bilineals simètriques 87
10.4 Formes quadràtiques 87
10.5 Producte escalar 88
10.6 Norma 89
10.7 Distància 90
10.8 Ortogonalitat 90
10.9 Exercicis 91

Bibliografia **93**

4 Espais vectorials

4.1 Espai vectorial

Un *espai vectorial real* és qualsevol conjunt dotat de dues operacions $(E, +, \cdot)$, anomenades respectivament suma i producte per escalars, tals que:

La suma, $E \times E \xrightarrow{+} E$, té les propietats següents:

a) Associativa: $\forall x, y, z \in E \quad x + (y + z) = (x + y) + z$.

b) Element neutre: $\exists e \in E \; \forall x \in E \quad x + e = e + x = x$.

c) Element oposat: $\forall x \in E \; \exists y \in E \quad x + y = y + x = e$.

d) Commutativa: $\forall x, y \in E \quad x + y = y + x$.

El producte per escalars, $\mathbb{R} \times E \xrightarrow{\cdot} E$, té les propietats següents:

a) Distributiva: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall x, y \in E \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

b) Compatibilitat amb la suma: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \forall x \in E \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

c) Compatibilitat amb el producte: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \forall x \in E \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

d) Unitat: $\forall x \in E \quad 1x = x$.

Els elements del conjunt E s'anomenen *vectors* i es solen escriure $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,... Els elements de $\mathbb{R}$ s'anomenen *escalars* i es solen escriure λ, μ, ν, a, b, c,x, y, z, ...

Exemples:

a) El conjunt $\mathbb{R}^n$ és un espai vectorial real, amb les operacions de suma i de producte per escalars component a component. Els elements de $\mathbb{R}^n$ es poden interpretar com a vectors (espai de vectors) i també com a punts (espai euclidià).

b) El conjunt $\mathbb{R}[x]$ de tots els polinomis d'una variable amb coeficients reals és un espai vectorial real amb les operacions de suma i de producte per escalars habituals.

c) El conjunt de tots els punts (x, y) que es troben sobre la recta d'equació $2x - y = 0$ és un espai vectorial amb les operacions de suma i de producte per escalars component a component. En canvi, el conjunt de tots els punts (x, y) que es troben sobre la recta d'equació $2x - y + 1 = 0$ no ho és.

d) El conjunt de totes les imatges digitalitzades d'una mida determinada és un espai vectorial amb les operacions de suma i de producte per escalars píxel a píxel.

4.2 Combinacions lineals

Combinant les dues operacions definides en un espai vectorial, es formen vectors que són combinacions lineals d'altres vectors:

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{v_k}.$$

En el cas anterior, es diu que $\overrightarrow{v}$ és *combinació lineal* dels vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$, o també que *està generat* pels vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$.

4.3 Independència lineal

Es diu que k vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ són *linealment independents* quan és impossible expressar-ne un com a combinació lineal dels altres. Formalment, $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ són linealment independents si, i només si, es dóna la propietat següent:

$$\forall\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \qquad \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

4.4 Base d'un espai vectorial

Es diu que n vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ formen una *base* de l'espai E quan són linealment independents i generen tots els vectors de l'espai. Aleshores, tot vector $\overrightarrow{x} \in E$ s'expressa, de manera única, com a combinació lineal dels vectors de la base.

4.5 Coordenades

Sigui $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ una base de l'espai E, i sigui $\overrightarrow{x}$ un vector qualsevol d'E. Considerem la seva única expressió com a combinació dels vectors de la base:

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{v_n}.$$

Els escalars $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'anomenen *coordenades* del vector $\overrightarrow{x}$ en la base donada, i s'escriu

$$\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

4.6 Dimensió

Un espai vectorial pot tenir moltes bases diferents, però totes les bases d'un mateix espai vectorial tenen el mateix nombre de vectors. Aquest nombre s'anomena *dimensió* de l'espai vectorial.

Una base d'un espai vectorial es pot pensar també com un conjunt maximal de vectors linealment independents, o també com un conjunt minimal de vectors generadors.

Exemples:

a) A $\mathbb{R}^3$, els conjunts següents de vectors formen bases:

i) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
ii) $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$.
iii) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (1, 1, -2)$.

Les coordenades del vector $w = (1, 2, 3)$ en aquestes bases són, respectivament:

i) En la base e_1, e_2, e_3, les coordenades de w són $(1, 2, 3)$.
ii) En la base u_1, u_2, u_3, les coordenades de w són $(-1, -1, 3)$.
iii) En la base v_1, v_2, v_3, les coordenades de w són $(2, -1/2, -1/2)$.

b) Una base de l'espai vectorial $\mathbb{R}[x]$ està formada pels polinomis 1, x, x^2, x^3, x^4,... (Observeu que aquest espai vectorial és de dimensió infinita.)

c) Una base de l'espai de les imatges de 3×5 píxels està formada per les 15 imatges 3×5 que tenen zeros a totes les posicions excepte en una, on tenen un ú.

4.7 Subespai vectorial

Un subespai vectorial d'un espai vectorial E és qualsevol subconjunt $F \subseteq E$ en el qual les dues operacions suma i producte per escalars són internes, és a dir, tal que:

a) $\forall x, y \in F \quad x + y \in F$.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in F \quad \lambda x \in F$.

Això també es pot expressar amb l'única condició següent:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in F \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

Donats k vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ d'un espai E, és freqüent considerar el conjunt de totes les seves combinacions lineals:

$$F = \{\overrightarrow{v} \in E \mid \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{v_i}\}.$$

Aquest conjunt F és un subespai vectorial de l'espai E, s'anomena *subespai generat* pels vectors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ i s'escriu $F =< \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k} >$.

Exemples:

a) A l'espai vectorial de dimensió 3, qualsevol recta que passi per l'origen és un subespai vectorial (de dimensió 1).

b) A l'espai vectorial de dimensió 3, qualsevol pla que passi per l'origen és un subespai vectorial (de dimensió 2).

4.8 Aplicació lineal

Una *aplicació lineal* entre dos espais vectorials E i F és una aplicació $E \xrightarrow{f} F$ que respecta les operacions suma i producte per escalars dels dos espais. És a dir, f és una aplicació lineal si, i només si, es satisfan les dues condicions següents:

a) $\forall x, y \in E \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Això també es pot expressar amb l'única condició següent:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in E \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

En conseqüència, les aplicacions lineals transformen vectors linealment dependents en vectors linealment dependents.

Una aplicació lineal queda totalment determinada si es coneixen les imatges dels vectors d'una base de l'espai de sortida. Concretament, si $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ és una base d'un espai vectorial E, i $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal de la qual es coneixen les imatges $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})$ dels vectors de la base, aleshores la imatge $f(\overrightarrow{x})$ de qualsevol altre vector $\overrightarrow{x} \in E$ és immediata d'obtenir a partir de l'expressió del vector $\overrightarrow{x}$ com a combinació dels vectors de la base, $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}$ ja que, per la linealitat de f, es té $f(\overrightarrow{x}) = f(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \ldots + x_n f(\overrightarrow{e_n})$.

Cal observar que res no garanteix que els vectors $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})$ siguin linealment independents. De fet, és una qüestió molt freqüentment estudiada la de la dimensió de l'espai $f(E)$, és a dir, la del nombre màxim de vectors linealment independents d'entre els $f(\overrightarrow{e_i})$. Aquesta dimensió també s'anomena *rang* de l'aplicació lineal f.

Una mica de terminologia sobre aplicacions lineals:

a) Les aplicacions lineals injectives també s'anomenen *monomorfismes*.

b) Les aplicacions lineals exhaustives també s'anomenen *epimorfismes*.

c) Les aplicacions lineals bijectives també s'anomenen *isomorfismes*.

d) Quan existeix un isomorfisme entre dos espais vectorials, es diu que aquests són *isomorfs*.

e) Quan $E = F$, l'aplicació lineal també s'anomena *endomorfisme*.

f) Els endomorfismes bijectius també s'anomenen *automorfismes*.

Exemples:

a) L'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x, y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ és lineal i s'anomena projecció. Es tracta d'un epimorfisme.

b) L'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x, 2y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ és lineal i s'anomena homotècia de raó 2. Es tracta d'un automorfisme.

4.9 Exercicis

Exercici 4.1. Expresseu en cada cas, si és possible, el vector $\overrightarrow{v}$ com combinació lineal dels vectors $\overrightarrow{v_i}$:

a) $\overrightarrow{v} = (\sqrt{2}, -1)$, $\overrightarrow{v_1} = (\sqrt{3}, 2)$, $\overrightarrow{v_2} = (-\sqrt{6}, 2)$ a $\mathbb{R}^2$.

b) $\overrightarrow{v} = (2, 4)$, $\overrightarrow{v_1} = (-1, 3)$, $\overrightarrow{v_2} = (2, -6)$ a $\mathbb{R}^2$.

c) $\overrightarrow{v} = (2, -1, 3)$, $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v_3} = (0, 1, 1)$ a $\mathbb{R}^3$.

Exercici 4.2. Comproveu que els vectors $(-1, 3, -1)$, $(3, -1, 1)$ i $(4, -4, 2)$ són linealment dependents a $\mathbb{R}^3$ i expresseu el tercer en funció dels dos primers.

Exercici 4.3. Donats els vectors $(1, -4, 6)$, $(1, 4, 4)$ i $(0, -4, x)$ de l'espai $\mathbb{R}^3$, determineu x per tal que siguin independents.

Exercici 4.4. Demostreu que A i B són el mateix subespai de $\mathbb{R}^3$:

$$A =< (1, 0, -1), (0, -2, 1) >$$
$$B =< (1, -2, 0), (2, -2, -1) >$$

Exercici 4.5. Trobeu el valor de k per tal que els vectors $(1, 2, k)$, $(4, 1, k)$ i $(0, 2, 2)$ generin tot l'espai $\mathbb{R}^3$.

Exercici 4.6. Es considera un espai vectorial E amb base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. Demostreu que els vectors $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ i $\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1}$ també formen una base d'E.

Exercici 4.7. Determineu quines d'aquestes aplicacions de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ són lineals:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$

b) $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2 + 2, 0)$

c) $h(x, y, z) = (0, x + y, 0)$

d) $k(x, y, z) = (xy, z, x)$

Exercici 4.8. Siguin $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f(a, b) = (a, a + b, b)$, i $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $g(a, b, c) = (a + b, c)$.

a) Demostreu que f i g són lineals.

b) Estudieu f i g.

c) Com són $f \circ g$ i $g \circ f$?

5 Operacions amb matrius

5.1 Matrius

Una *matriu* de tipus $m \times n$ amb coeficients reals és una taula

$$(A) = (a_i^j) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \quad \text{on } \ a_i^j \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Els coeficients $a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n$ formen la *fila* i-èsima de la matriu A. Els coeficients $a_1^j, a_2^j, \ldots, a_m^j$ formen la *columna* j-èsima de la matriu A. La matriu A té m files i n columnes. El conjunt de totes les matrius $m \times n$ amb coeficients reals s'escriu $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Quan $m = n$, la matriu s'anomena *quadrada.* El conjunt de totes les matrius quadrades de mida $n \times n$ amb coeficients reals s'escriu $M_n(\mathbb{R})$.

Els coeficients $a_1^1, a_2^2, \ldots, a_n^n$ d'una matriu quadrada formen la seva *diagonal.*

Una matriu quadrada s'anomena *triangular superior* (respectivament, *inferior*) si $a_i^j = 0$ per a tot $i > j$ (respectivament, $i < j$).

Una matriu quadrada s'anomena *diagonal* si $a_i^j = 0$ per a tot $i \neq j$. Quan una matriu diagonal té tots els coeficients iguals, s'anomena *escalar* o *homotècia.*

Una matriu quadrada s'anomena *simètrica* (resp. *antisimètrica*) quan $a_i^j = a_j^i$ (resp. $a_i^j = -a_j^i$) $\forall i, j$.

Les matrius $m \times 1$ s'anomenen *vectors columna.* Les matrius $1 \times n$ s'anomenen *vectors fila.* Tota matriu es pot pensar com un vector fila de vectors columna (o com un vector columna de vectors fila):

$$A = (a_i^j) = (a^1, a^2, \ldots, a^n).$$

5.2 Suma de matrius

Si $A = (a_i^j)$ i $B = (b_i^j)$ són dues matrius de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, aleshores es poden sumar, i

$$A + B = (c_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad \text{amb} \quad c_i^j = a_i^j + b_i^j \quad \forall i, j.$$

Exemple: El menjador d'una residència universitària analitza les dades dels dinars que serveix els caps de setmana:

DISSABTE	Carn	Peix	Vegetarià
Residents	98	24	42
No residents	39	15	22

DIUMENGE	Carn	Peix	Vegetarià
Residents	55	19	44
No residents	43	12	38

Si la persona responsable del menjador vol estudiar els menús que serveix el cap de setmana, sols ha de representar les dades de dissabte i de diumenge matricialment, i sumar les dues matrius:

$$Ds + Dm = \begin{pmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 12 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153 & 43 & 86 \\ 82 & 27 & 60 \end{pmatrix}.$$

Propietats de la suma de matrius:

a) La suma és una operació interna a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

b) És associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

c) És commutativa: $A + B = B + A$.

d) Té element neutre: $0 = (0)$, la matriu que té tots els seus coeficients iguals a zero.

e) Cada matriu té una matriu oposada: Si $A = (a_i^j)$, aleshores $-A = (-a_i^j)$.

En resum, $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ és un grup abelià.

5.3 Producte d'una matriu per un escalar

Si $A = (a_i^j)$ és una matriu de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i λ és un nombre real, aleshores

$$\lambda A = (c_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad \text{amb} \quad c_i^j = \lambda a_i^j \quad \forall i, j.$$

Exemple: Continuant amb el cas del menjador, si es vol tenir una aproximació al nombre de dinars servits els quatre dissabtes d'un mes determinat, no hi ha més que multiplicar la matriu Ds per 4:

$$4Ds = 4\begin{pmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 392 & 96 & 168 \\ 156 & 60 & 88 \end{pmatrix}.$$

Propietats del producte de matrius per escalars:

a) El resultat de multiplicar una matriu per un escalar és una matriu de les mateixes dimensions que la inicial.

b) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

c) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.

d) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

e) $1A = A$.

En resum, $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ és un espai vectorial real.

5.4 Producte d'una matriu per un vector

Si $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $b = (b_j) \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, aleshores la matriu A i el vector b es poden multiplicar, i el resultat és el vector

$$Ab = (c_i) \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}), \quad \text{amb} \quad c_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j b_j \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Exemple: Un taxista del Vallès Occidental es dedica a fer recorreguts entre Terrassa i Sabadell i també dins cadascuna de les dues ciutats. Ha comprovat que, quan es troba a Terrassa, la probabilitat que el servei següent sigui dins la mateixa ciutat és 0.2, mentre que la probabilitat que sigui a Sabadell és 0.8. Així mateix, ha comprovat que quan es troba a Sabadell, la probabilitat que el servei següent sigui dins Sabadell és 0.6, mentre que la probabilitat que el dugui a Terrassa és 0.4. Representem aquestes probabilitats mitjançant una matriu:

$$M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

D'aquesta manera, les columnes recullen les dades segons les ciutats de sortida, i les files les recullen segons les ciutats d'arribada.

Si coneixem les probabilitats p_t i p_s que en un determinat moment el taxi es trobi a Terrassa o a Sabadell respectivament (en el nostre senzill model, $p_s = 1 - p_t$), podem conèixer amb quina probabilitat es trobarà a cadascuna de les dues ciutats al cap d'un servei: la probabilitat que sigui a Terrassa és $0.2p_t + 0.4p_s$ i la probabilitat que sigui a Sabadell és $0.8p_t + 0.6p_s$. Observeu que l'operació que hem dut a terme és, en realitat, el producte de la matriu M pel vector columna (p_t, p_s). Per exemple, si la probabilitat de ser a cadascuna de les dues ciutats, en un determinat moment, és 0.5, al cap d'un servei és

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 \\ 0.8 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}.$$

5.5 Producte de matrius

Si $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $B = (b_i^j) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, aleshores les matrius A i B es poden multiplicar, i

$$AB = (c_i^j) \in M_{m\times p}(\mathbb{R}), \quad \text{amb} \quad c_i^j = \sum_{k=1}^{n} a_i^k b_k^j \quad \forall i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots p.$$

Observeu que el producte d'una matriu per un vector, estudiat a l'apartat anterior, no és més que un cas particular de producte de matrius.

Exemple: Una cadena de supermercats disposa de dos proveïdors diferents per als mateixos tres productes. Aquests són els preus unitaris que ofereixen:

	Producte A	Producte B	Producte C
Proveïdor 1	5	1	4
Proveïdor 2	2	2	8

La cadena té 4 supermercats a la ciutat, que necessiten setmanalment les quantitats següents dels tres productes:

	Súper 1	Súper 2	Súper 3	Súper 4
Producte A	100	50	30	10
Producte B	20	50	20	20
Producte C	30	50	10	50

La manera de conèixer els costos de les comandes dels 4 supermercats en funció del proveïdor és multiplicar les matrius corresponents:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 50 & 30 & 10 \\ 20 & 50 & 20 & 20 \\ 30 & 50 & 10 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 640 & 500 & 210 & 270 \\ 480 & 600 & 180 & 450 \end{pmatrix}.$$

Així, per exemple, és més convenient que la comanda del supermercat 1 sigui servida pel proveïdor 2 ($480 < 640$), mentre que el proveïdor 1 és més convenient per al supermercat 2 ($500 < 600$).

Propietats del producte de matrius:

a) El producte de matrius és una operació que no sempre es pot dur a terme (depèn de les dimensions de les matrius). Quan $m = n = p$, el producte és una operació interna a $M_n(\mathbb{R})$.

b) El producte de matrius és associatiu: $(AB)C = A(BC)$.

c) És distributiu respecte de la suma: $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$ i també $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.

d) Té element neutre: Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, aleshores $AI_n = A$ i $I_mA = A$, on $I_k = (\delta_i^j) \in M_k(\mathbb{R})$ és la matriu $k \times k$ que té tots els coeficients de la seva diagonal igual a 1, i tota la resta de coeficients iguals a zero.

En resum, el conjunt de les matrius quadrades d'una dimensió donada, amb la suma i el producte, $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ té estructura d'anell.

Cal tenir en compte, però, que aquest anell no és commutatiu, ni és un cos:

- El producte de matrius no és commutatiu: en general, $AB \neq BA$, tot i que, en certs casos, es pot donar la igualtat.
- No tota matriu és invertible: Si $A = (a_i^j)$, aleshores no sempre existeix A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

A més,

e) El producte de matrius és compatible amb el producte per escalars: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

Matriu inversa. Sabem que no tota matriu és invertible. Tanmateix, podem preguntar-nos en quins casos una matriu quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ té inversa, és a dir, en quins casos existeix una matriu $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

En general, si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ens podem preguntar en quins casos existeixen matrius $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ i $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tals que $BA = I_n$ i $AC = I_m$.

Per respondre a aquestes preguntes cal esperar una mica, fins que hàgim estudiat com calcular el rang i el determinant d'una matriu.

5.6 Transposició de matrius

Si $A = (a_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, aleshores la seva transposada és la matriu

$$A^T = (c_i^j) \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), \quad \text{amb } c_i^j = a_j^i \quad \forall i, j.$$

Propietats de la transposició de matrius:

a) El resultat de transposar una matriu és una matriu amb les dimensions intercanviades respecte de la inicial.

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

c) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

d) $(A^T)^T = A$.

e) $(AB)^T = B^T A^T$ (atenció: s'inverteix l'ordre).

f) Si A és invertible, aleshores A^T també ho és i $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

5.7 Altres operacions amb matrius

Moltes altres operacions són possibles amb matrius, però la seva aplicabilitat és molt més reduïda i per això no és freqüent el seu estudi. Farem referència aquí de passada al producte de Hadamard de dues matrius: Si $A = (a_i^j), B = (b_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ el seu producte de Hadamard és

$$A \cdot B = (c_i^j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad \text{amb} \quad c_i^j = a_i^j b_i^j \quad \forall i, j = 1 \ldots n.$$

Exemple: Considereu de nou la matriu M de probabilitats del taxista del Vallès. Suposem que els preus mitjans dels serveis són els següents, expressats en EUR: dins Terrassa 6, de Terrassa a Sabadell o viceversa 15, dins Sabadell 7. Es pot obtenir la matriu dels cobraments esperats mitjançant el producte de Hadamard següent:

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 & 6 \\ 12 & 4.2 \end{pmatrix}.$$

5.8 Exercicis

Exercici 5.9. Escriviu les matrius següents:

a) $A = (a_i^j)$, on $a_i^j = i + j$ per $i = 1, 2, 3$ i $j = 1, 2$.

b) $B = (b_k^t)$, on $b_k^t = k^{t-1}$ per $k = 1, \ldots, 4$ i $t = 1, \ldots, 3$.

c) $C = (c_r^s)$, on $c_r^s = 3r + 2(s-1)$ per $r = 1, \ldots, 4$ i $s = 1, \ldots, 5$.

d) $D = (d_i^j)$, on $d_i^j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ per $i, j = 1, \ldots, n$.

Exercici 5.10. Confirmeu les igualtats següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Si $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores $A^2 = A$.

c) Si $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, aleshores $BB^T = B^T B = Id$.

d) Si $C = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$, aleshores C^2 és la matriu nul·la.

e) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat.

Exercici 5.11. Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Comproveu que $AX = BX$, malgrat que $A \neq B$.

Exercici 5.12. Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$. Quines són les transposades de les matrius A i B? Calculeu $A + B^T$ i $A^T + B$ i expliqueu la relació entre els resultats d'aquestes dues sumes.

Exercici 5.13. Demostreu que si A és una matriu invertible aleshores A^T també ho és i $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Exercici 5.14. Si A i B són matrius simètriques, demostreu que AB és simètrica si, i només si, A i B commuten.

Exercici 5.15. Sigui B una matriu simètrica. Comproveu que $A^T BA$ també ho és. Trobeu alguna condició perquè es satisfaci el recíproc.

Exercici 5.16.

a) Trobeu totes les matrius que commuten amb la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Trobeu totes les matrius que commuten amb la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 5.17. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculeu A^2, A^3, A^4, etc., fins que sigueu capaços de relacionar el resultat amb la successió de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Exercici 5.18. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, demostreu que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercici 5.19. Trobeu per a quins valors de k la matriu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & k & 4 \end{pmatrix}$ és invertible i, per aquests valors, calculeu la seva inversa.

Exercici 5.20. Una xarxa de comunicacions té 5 nodes que es comuniquen de forma directa de la manera següent: 1 pot enviar missatges a 2 i a 3, 2 pot enviar missatges a 3 i a 4, 3 pot enviar missatges a 5, 4 pot enviar missatges a 5, 5 pot enviar missatges a 3.

Representeu aquesta situació amb una matriu C de bits, on 1 indica la possibilitat de comunicació i 0 la impossibilitat.

Calculeu i interpreteu els resultats dels productes C^2, C^3 i $C + C^2 + C^3$.

Exercici 5.21. Reprenent la matriu M del taxista del Vallès, calculeu i interpreteu el resultat del producte M^2 pel vector $(0.5, 0.5)$.

Exercici 5.22. Suposeu que les probabilitats que els votants de tres partits polítics mantinguin o canviïn la seva intenció de vot al llarg d'un any es representa mitjançant la següent matriu:

$$P = \begin{pmatrix} .4 & .3 & .5 \\ .3 & .6 & .1 \\ .3 & .1 & .4 \end{pmatrix}.$$

Els 1000 votants d'un poble estan dividits en les seves opinions polítiques, de manera que 600 recolzen el primer partit, 300 el segon i 100 el tercer.

a) Calculeu les tendències polítiques dels 1000 votants al cap d'un any.

b) El mateix, al cap de 2, 3 i 4 anys.

c) Observeu que els elements de cada columna de P sumen 1. Comproveu que aquesta propietat d'una matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$ es pot expressar dient que $1_n A = 1_n$, on 1_n és la matriu de $M_n(\mathbb{R})$ que té tots els coeficients iguals a 1.

d) Demostreu que tots els elements de cada columna de P^k també sumen 1, per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$.

6 Les aplicacions més clàssiques

6.1 Expressió matricial d'una aplicació lineal

Hem vist que tota aplicació lineal està determinada per les imatges dels vectors d'una base de l'espai de sortida. Vegem ara com això permet expressar l'aplicació en termes matricials.

Donada una aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$, sigui $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de l'espai vectorial E, i $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de l'espai vectorial F.

Suposem conegudes les imatges dels vectors de la base d'E: $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$, és a dir, suposem que es coneixen les seves coordenades en la base $\{v_j\}_{j=1\ldots m}$ de l'espai F:

$$
\begin{aligned}
&f(e_1) = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_m^1),\\
&f(e_2) = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_m^2),\\
&\dots\\
&f(e_n) = (a_1^n, a_2^n, \dots, a_m^n).
\end{aligned}
$$

Aleshores la imatge $f(x)$ de qualsevol altre vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ es calcula com el producte de la matriu $A = (a_i^j) = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ pel vector columna $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\overrightarrow{e_i})\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^i \overrightarrow{v_j}\right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_j^i x_i\right) \overrightarrow{v_j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_1^i x_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_m^i x_i\right)\\
&= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax.
\end{aligned}
$$

Exemples:

a) La projecció $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x, y)$ es pot expressar matricialment així:

$$
f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
$$

b) L'homotècia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x, 2y)$ es pot expressar matricialment així:

$$
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.
$$

Observeu que la composició d'aplicacions correspon al producte de matrius. Més concretament, si $E \xrightarrow{f} F$ i $F \xrightarrow{g} G$ són dues aplicacions lineals que s'expressen matricialment com $f(x) = Ax$ i $g(y) = By$, aleshores l'aplicació lineal $E \xrightarrow{g \circ f} G$ s'expressa matricialment com $(g \circ f)(x) = BAx$.

Sigui f una aplicació lineal que s'expressa matricialment com $f(x) = Ax$. Si f és un isomorfisme, aleshores A és invertible i $f^{-1}(x) = A^{-1}x$.

6.2 Expressió matricial dels sistemes d'equacions lineals

Un *sistema d'equacions lineals* amb m equacions i n incògnites, amb coeficients reals, és:

$$\left.\begin{array}{r} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + \ldots + a_1^nx_n = b_1 \\ a_2^1x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_2^nx_n = b_2 \\ \ldots \\ a_m^1x_1 + a_m^2x_2 + \ldots + a_m^nx_n = b_m \end{array}\right\} \quad \text{on } a_i^j, b_i \in \mathbb{R}.$$

Aquest conjunt d'equacions es pot expressar matricialment així:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \ldots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$Ax = b,$$

on $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ s'anomena *matriu del sistema*, $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ s'anomena *terme independent*, i $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ és el vector de les *incògnites* o *variables*. Per a moltes aplicacions, es considera la matriu

$$A' = (A|b) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_m^1 & a_m^2 & \ldots & a_m^n & b_m \end{pmatrix},$$

que s'anomena *matriu ampliada* del sistema. En el cas que el terme independent b sigui igual a zero, el sistema s'anomena *homogeni*.

Resoldre el sistema d'equacions consisteix a trobar tots els valors de x que satisfan totes les equacions del sistema.

Si es pensa la matriu A com la matriu d'una aplicació lineal f, trobar les solucions del sistema lineal, és a dir, trobar els valors de x tals que $Ax = b$, correspon a trobar els vectors x tals que $f(x) = b$, és a dir, trobar la antiimatge de b per l'aplicació f, és a dir el conjunt $f^{-1}(b)$. Com sabem, pot succeir que b no tingui antiimatges, o que en tingui i, en aquest darrer cas, pot ser que en tingui una o més d'una. En la terminologia dels sistemes d'equacions, això s'expressa de la manera següent: Un sistema d'equacions lineals s'anomena *compatible* si té solucions. En cas contrari, s'anomena *incompatible*. Un sistema compatible s'anomena *determinat* si té una única solució, i s'anomena *indeterminat* si en té més d'una.

6.3 Exercicis

Exercici 6.23. Digueu si les següents aplicacions són lineals, i escriviu llurs matrius:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x,3y) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \mapsto & (x_1,x_2,0,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \mapsto & (x_1,x_2) \end{array}$$

Exercici 6.24. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ que en la base canònica té la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Vegeu si f és isomorfisme.

b) Calculeu la matriu de f^{-1} en la base canònica.

c) Calculeu la antiimatge per f del vector $(1,2,-1,0)$.

Exercici 6.25. Sigui f un endomorfisme d'un espai E que té una base formada pels vectors e_1, e_2, e_3, e_4, de manera que $f(e_1)=e_1+2e_3$, $f(e_2)=e_2+e_3$, $f(e_3)=2e_1+e_2+e_3$, $f(e_4)=2e_1+2e_2+4e_3$. Escriviu la matriu de f en aquesta base.

Exercici 6.26. Un problema típic de transport és el de la distribució de productes des dels centres de producció fins als de distribució o venda. Suposeu que dues fàbriques amb 10 i 25 unitats d'un producte han de fer el subministrament a tres centres comercials que en necessiten 15, 15 i 5 unitats, respectivament. Si x_{ij} representa el nombre d'unitats que el centre de producció i subministra al centre de venda j, les quantitats de producte disponible a cada fàbrica satisfà les equacions

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=10 \qquad \text{i} \qquad x_{21}+x_{22}+x_{23}=25,$$

i els requeriments dels centres comercials s'expressen amb les equacions

$$x_{11}+x_{21}=15 \qquad \text{i} \qquad x_{12}+x_{22}=15 \qquad \text{i} \qquad x_{13}+x_{23}=5.$$

Escriviu les equacions anteriors en la forma matricial $Ax=b$, tot determinant la matriu A.

Exercici 6.27. Una fàbrica utilitza tres màquines diferents, A, B i C, durant 8 hores al dia, per manufacturar 4 productes diferents, t, u, v i w. La taula següent recull el nombre d'hores que requereix la fabricació de cada producte a cada màquina:

	t	u	v	w
A	1	2	1	2
B	7	0	2	0
C	1	0	0	4

Trobeu les equacions que expressen la plena utilització de les màquines, en termes del nombre d'unitats de cada producte produïdes en les 8 hores diàries de funcionament.

7 Expressió matricial dels canvis de base

7.1 Expressió d'un vector en bases diferents

Siguin $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ i $\{\overrightarrow{e_1}', \ldots, \overrightarrow{e_n}'\}$ dues bases d'un mateix espai vectorial E. Qualsevol vector $\overrightarrow{v} \in E$ té unes coordenades $(x_1, \ldots, x_n)$ en la base $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=1\ldots n}$ i unes coordenades $(x_1', \ldots, x_n')$ en la base $\{\overrightarrow{e_i}'\}_{i=1\ldots n}$. Volem conèixer la relació entre les coordenades $(x_1, \ldots, x_n)$ i les coordenades $(x_1', \ldots, x_n')$ de $\overrightarrow{v}$.

Comencem expressant els vectors de la base $\{\overrightarrow{e_i}'\}$ com a combinació lineal de la base $\{\overrightarrow{e_i}\}$: $\overrightarrow{e_j}' = (a_1^j, a_2^j, \ldots, a_n^j)$, es a dir,

$$\overrightarrow{e_j}' = \sum_{i=1}^{n} a_i^j \overrightarrow{e_i} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Aleshores, podem escriure el vector $\overrightarrow{x}$ de les dues maneres següents:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j' \overrightarrow{e_j}' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} a_i^j \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i^j x_j' \right) \overrightarrow{e_i},$$

d'on es dedueix que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j x_j' \qquad i = 1, \ldots, n;$$

és a dir que

$$\overrightarrow{x} = A \overrightarrow{x}', \qquad \text{on } A = (a_i^j) = (\overrightarrow{e_1}', \ldots, \overrightarrow{e_n}').$$

Observeu que aquesta fórmula es pot veure com l'expressió de l'aplicació lineal identitat de l'espai vectorial E en ell mateix, quan la base de sortida és $\{\overrightarrow{e_i}'\}$ i la base d'arribada és $\{\overrightarrow{e_i}\}$.

Així doncs, en particular, la matriu d'un canvi de base sempre és invertible, ja que es tracta de la matriu de la funció identitat, que és bijectiva.

Exemples: Ja hem vist que a $\mathbb{R}^3$, els conjunts següents de vectors formen bases:

a) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$,

b) $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$,

c) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (1, 1, -2)$;

i que les coordenades del vector $w = (1, 2, 3)$ en aquestes bases són, respectivament:

a) en la base e_1, e_2, e_3, les coordenades de w són $w_e = (1, 2, 3)$,

b) en la base u_1, u_2, u_3, les coordenades de w són $w_u = (-1, -1, 3)$,

c) en la base v_1, v_2, v_3, les coordenades de w són $w_v = (2, -1/2, -1/2)$.

Comprovarem ara la relació entre unes coordenades i les altres:

a) La matriu del canvi de base entre la base e_i i la base u_i és

$$A_{eu} = (u_1, u_2, u_3)_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i és fàcil comprovar que

$$A_{eu} w_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = w_e.$$

b) La matriu del canvi de base entre la base e_i i la base v_i és

$$A_{ev} = (v_1, v_2, v_3)_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

i és fàcil comprovar que

$$A_{ev} w_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = w_e.$$

c) La matriu del canvi de base entre la base u_i i la base v_i és

$$A_{uv} = (v_1, v_2, v_3)_u = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

i és fàcil comprovar que

$$A_{uv} w_v = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = w_e.$$

7.2 Expressió d'una aplicació lineal en bases diferents

Considerem una aplicació lineal $E \xrightarrow{f} F$. Siguin $\{e_i\}$ i $\{e'_i\}$ dues base de l'espai vectorial E, i sigui C la matriu del canvi de base, $C = (e'_1, \ldots, e'_n)_e$. Siguin $\{u_j\}$ i $\{u'_j\}$ dues bases de l'espai vectorial F, i sigui D la matriu del canvi de base, $D = (u'_1, \ldots, u'_m)_u$. Suposem que l'aplicació lineal f s'expressa matricialment en les bases e_i i u_j amb la matriu A i que s'expressa en les bases e'_i i u'_j amb la matriu A'. Aleshores

$$A' = D^{-1}AC.$$

Això es por comprovar fàcilment si es considera la composició d'aplicacions

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{I_E} & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{I_F} & F \\ \{e'_i\} & & \{e_i\} & & \{u_i\} & & \{u'_i\} \end{array}$$

I es té en compte que les expressions matricials involucrades són:

$$x = Cx', \qquad y = Ax, \qquad y' = D^{-1}y.$$

En particular, és molt freqüent considerar l'expressió matricial d'un mateix endomorfisme en dues bases diferents:

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{I} & E & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{I} & E \\ \{e'_i\} & & \{e_i\} & & \{e_i\} & & \{e'_i\} \end{array}$$

En aquest cas, l'expressió anterior es redueix a la següent:

$$A' = C^{-1}AC.$$

Exemple: Considerem l'aplicació lineal $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ definida, en les bases canòniques, per $f(x, y, z) = (2x + y, x - y - z)$. Si prenem com a nova base de $\mathbb{R}^3$ els vectors $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ i $(1, 1, 1)$, i com a nova base de $\mathbb{R}^2$ els vectors $(1, 1)$ i $(2, -1)$, aleshores l'expressió de f en aquestes bases es calcula de la manera següent. En les bases canòniques, la matriu de f és

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A $\mathbb{R}^3$, la matriu del canvi de base és

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A $\mathbb{R}^2$, la matriu del canvi de base és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

i la seva inversa és

$$D^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Així, doncs, en les noves bases, la matriu de f és

$$A' = D^{-1}AC = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

En altres paraules, en aquestes noves bases, l'expressió de f és

$$f(x', y', z') = \frac{1}{3}(4x' + 3y' + z', x' + 3y' + 4z').$$

7.3 Exercicis

Exercici 7.28. Sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base d'E i considereu els vectors $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_1 + e_3$ i $u_3 = e_2 + e_3$.

a) Demostreu que u_1, u_2, u_3 formen una base d'E.

b) Quin és el vector que en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ té les components $(1, -2, 0)$?

Exercici 7.29. Demostreu que els vectors $(0, 1, -2, 1)$, $(1, 1, 2, -1)$, $(1, 0, 0, 1)$ i $(2, 2, 0, -1)$ formen una base de $\mathbb{R}^4$. Expresseu en aquesta base el vector $(4, 2, -1, 5)$.

Exercici 7.30. Expresseu el vector $(0, 0, 0)$ com a combinació lineal dels vectors $(2, 1, 1)$, $(1, 3, 1)$ i $(-2, 1, 3)$.

Exercici 7.31. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donada per $f(2, -1) = (1, 0, -1, 3)$, $f(4, 1) = (2, -2, 3, 1)$. Escriviu l'equació de f en es bases canòniques.

Exercici 7.32. Es considera l'aplicació lineal f que en la base canònica té l'expressió $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 3x_2 - 3x_3$. Busqueu l'expressió de f en prendre la nova base $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (-1, 2, 0)$. Comproveu la correcció del resultat obtingut quan s'aplica al vector que en la nova base té coordenades $(4, 4, 4)$.

Exercici 7.33. Una aplicació lineal està definida per $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, x_2 + x_3)$ en certes bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ de l'espai de sortida i $\{v_1, v_2\}$ de l'espai d'arribada.

a) Trobeu la matriu A de f en les bases donades.

b) Trobeu la matriu B de f en les bases $\{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + e_2, 3e_3\}$, $\{2v_1, 2v_2\}$.

c) Trobeu la matriu C de f en les bases $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{2v_1, 2v_2\}$.

d) Trobeu la matriu D de f en les bases $\{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_2, 3e_3\}$, $\{v_1, v_2\}$.

e) Mitjançant B, trobeu la imatge del vector $v = -2e_1 + 2e_2 - 2e_3$.

f) Mitjançant A, trobeu la imatge del mateix vector v.

g) Comproveu la coherència dels resultats dels dos darrers apartats.

Exercici 7.34. Donada una matriu quadrada $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$, es defineix la traça d'A com:

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_i^i.$$

Demostreu que es compleix:

a) $\mathrm{tr}A^T = \mathrm{tr}A$

b) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}A$

c) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$

d) $\mathrm{tr}(AB) \neq \mathrm{tr}A\mathrm{tr}B$

e) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

f) Si f és un endomorfisme d'un espai vectorial, aleshores totes les matrius associades a f tenen la mateixa traça.

8 Transformacions elementals. Aplicació al càlcul de rangs, determinants i solucions de sistemes d'equacions lineals

8.1 Rang d'una matriu

El *rang* d'una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ és el nombre màxim de vectors columna d'A linealment independents. De fet, la definició és pot fer indistintament per columnes o per files, tal com veurem més endavant.

El rang d'una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sempre és menor o igual que n i que m, ja que el nombre de vectors columna linealment independents no pot ser més gran que el nombre de vectors ni més gran que la dimensió de l'espai on es troben.

Si A és una matriu quadrada, aleshores el fet que tingui rang màxim és equivalent a que sigui invertible. Per demostrar-ho, sols cal pensar A com la matriu d'un endomorfisme: que A tingui rang màxim equival a que la imatge per f d'una base d'E sigui una altra base d'E i, per tant, f sigui bijectiva.

8.2 Transformacions elementals d'una matriu

Les transformacions elementals són manipulacions de les files i columnes d'una matriu que es duen a terme per a obtenir una nova matriu que tingui una forma més senzilla però que mantingui alhora les propietats més importants de la matriu inicial, com ara el seu rang, per exemple.

Les transformacions elementals per files (respectivament, columnes) són les següents:

a) Transposar dues files (columnes).

b) Multiplicar una fila (columna) per un escalar diferent de zero.

c) Sumar a una fila (columna) un múltiple d'una altra.

Es diu que dues matrius són *equivalents per files (columnes)* si es pot passar de l'una a l'altra per transformacions elementals de files (columnes). Es diu que dues matrius són *equivalents* si es pot passar de l'una a l'altra per transformacions elementals de files i columnes.

És interessant observar que si es pensa A com la matriu d'una aplicació lineal $E \xrightarrow{f} F$, les transformacions elementals per columnes corresponen a les manipulacions següents de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'E:

a) transposar les columnes i i j és transposar l'orde dels vectors e_i i e_j,

b) multiplicar la columna i per l'escalar λ és substituir e_i per λe_i,

c) sumar a la columna i un múltiple λ de la columna j és substituir e_i per $e_i + \lambda e_j$.

De manera anàloga, les transformacions per files corresponen a manipulacions de la base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de F.

D'altra banda, si es pensa A com la matriu del sistema lineal $Ax = 0$, les transformacions elementals per files corresponen a les operacions equivalents entre les equacions del sistema, mentre que les transformacions elementals per columnes corresponen a operacions equivalents entre les incògnites.

A partir d'aquesta interpretació, és clar que algunes propietats de les matrius no s'alteren en aplicar transformacions elementals. Per exemple:

a) Les transformacions elementals per files i columnes no modifiquen el rang d'una matriu.

b) Les transformacions elementals per files no modifiquen les solucions d'un sistema d'equacions lineals (cal ser una mica més prudent amb les transformacions per columnes, perquè modifiquen les variables del sistema).

c) Les transformacions elementals per files i columnes no modifiquen el fet que una matriu sigui o no invertible.

Dit altrament, totes les matrius equivalents tenen el mateix rang. Totes les matrius equivalents per files resolen el mateix sistema d'equacions. Si una matriu és invertible, totes les seves equivalents també ho són.

Les transformacions elementals d'una matriu A es poden expressar com el producte d'A per una altra matriu. Més concretament, les transformacions elementals per files corresponen al producte per l'esquerra per les matrius següents:

a) La transposició de les files i i j de la matriu A s'obté fent el producte $I_{ij}^{\sigma}A$, on I_{ij}^{σ} és la matriu identitat on s'han transposat les files i i j:

$$I_{ij}^{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

b) El producte de la fila i de la matriu A per l'escalar λ s'obté fent el producte $T_i(\lambda)A$, on $T_i(\lambda)$ és la matriu que té tots els coeficients iguals a zero excepte a la diagonal, on tots els coeficients són iguals a 1, excepte l'i-èsim, que val λ:

$$T_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

c) Sumar a la fila i de la matriu A un múltiple λ de la fila j és el mateix que fer el producte $U_{ij}(\lambda)A$, on $U_{ij}(\lambda)$ és la matriu que té tots els coeficients iguals a zero excepte a la diagonal, on tots els coeficients són 1, i el coeficient de la fila i i columna j, que val λ:

$$U_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && \lambda && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

Així doncs, fer transformacions elementals per files a una matriu A és el mateix que multiplicar-la per l'esquerra per una certa matriu P. Aquesta matriu P és el producte de matrius dels tres tipus descrits. Anàlogament, fer transformacions elementals per columnes a una matriu A és el mateix que multiplicar-la per la dreta per una certa matriu Q que és el producte de matrius dels tres tipus anàlegs als anteriors.

Files o columnes? Estem en condicions ara de demostrar que el rang d'una matriu es pot definir indistintament com el nombre màxim de files o el nombre màxim de columnes de la matriu linealment independents. Suposem que una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tingués r files linealment independents i s columnes linealment independents. Aleshores es podria expressar de la forma següent:

$$A = \begin{pmatrix} X_{r\times s} & Y_{r\times(n-s)} \\ Z_{(m-r)\times s} & W_{(m-r)\times(n-s)} \end{pmatrix},$$

on les r files $X\ Y$ són linealment independents i les s columnes $\begin{matrix} X \\ Z \end{matrix}$ són linealment independents. Com que A no té més que r files linealment independents, les files $Z\ W$ són combinació lineal de les files $X\ Y$. En particular, les files Z són combinació lineal de les files X i, per tant, es poden obtenir de les files de X per transformacions elementals. Així, doncs, $Z = PX$ per una certa matriu P de transformacions per files. Demostrarem ara que les s columnes X són linealment independents (sabem que ho són les s columnes $\begin{matrix} X \\ Z \end{matrix}$, però no necessàriament les X, considerades en solitari). Si no ho fossin, tindríem $Xa = 0$ per algun vector $a \neq 0$. Per tant, $Za = PXa = 0$ i, finalment, $\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} a = 0$, contradient la hipòtesi d'independència lineal de les s primeres columnes de la matriu A. Així, doncs, la matriu $X \in M_{r\times s}(\mathbb{R})$ té s columnes linealment independents de longitud r i, per tant, $s \leq r$. Un argument anàleg sobre les files $X\ Y$ permet demostrar que $r \leq s$. La conclusió és, doncs, que $r = s$. En conseqüència, a qualsevol matriu, el nombre de columnes linealment independents i el nombre de files linealment independents sempre coincideixen.

8.3 Formes reduïdes

Mitjançant transformacions elementals per files (i, si s'escau, transposicions de columnes), qualsevol matriu $A \in M_{m\times n}$ es pot reduir a la forma següent, que s'anomena *forma reduïda per files:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & a_1^{r+1} & \dots & a_1^n \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_r^{r+1} & \dots & a_r^n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Mitjançant transformacions elementals per columnes (i, si s'escau, transposicions de files), es pot obtenir la *forma reduïda per columnes* de qualsevol matriu A, que té l'estructura següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{r+1}^1 & \dots & b_{r+1}^r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_m^1 & \dots & b_m^r & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Mitjançant transformacions elementals per files i columnes, es pot obtenir la *forma reduïda* de qualsevol matriu A, que té l'estructura següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cal observar que el rang d'una matriu reduïda com qualsevol de les anteriors és trivialment r.

Finalment, és interessant constatar que la reducció per files d'una matriu invertible permet obtenir la seva inversa. Més concretament, si A és invertible, procedint a la seva reducció per files s'obté $PA = Id$, d'on $P = A^{-1}$.

8.4 Discussió i solució de sistemes d'equacions lineals

Considerem un sistema de m equacions lineals amb n incògnites:

$$Ax = b.$$

Estem en condicions ara de descriure amb precisió en quines condicions té solució:

a) El sistema és incompatible (no té solució) si $\text{rang}A < \text{rang}A'$.

b) El sistema és compatible (té solució) si $\text{rang}A = \text{rang}A'$.

c) El sistema és compatible determinat (té solució única) si és compatible i $\text{rang}A = n$.

d) El sistema és compatible indeterminat (té múltiples solucions) si és compatible i $\text{rang}A < n$. En aquest cas, el sistema té $n - \text{rang}A$ graus de llibertat.

Aquestes afirmacions són prou evidents: no és possible expressar el vector b com a combinació lineal dels vectors columna de la matriu A si b és linealment independent d'aquests. En canvi, si b és linealment depenent dels vectors d'A, és possible trobar al menys una manera d'escriure b com a combinació lineal d'aquests. En el cas que el rang de la matriu A és màxim, els seus vectors columna són tots linealment independents i, per tant, les seves combinacions lineals són úniques. En canvi, si no són tots linealment independents, és possible escriure de més d'una manera un mateix vector b com a combinació lineal dels vectors d'A.

En particular, tots els sistemes homogenis són compatibles i tenen al menys la solució trivial $x = 0$.

Així, el càlcul de rangs ens permet conèixer si un sistema és compatible o no. Pel que fa a trobar les seves solucions, un bon mètode és aplicar transformacions elementals per files a la matriu ampliada del sistema, A', fins a obtenir-ne la forma reduïda, que permet la solució immediata del sistema. Es desaconsella fortament aplicar transformacions elementals per columnes, ja que modifiquen les variables del sistema, mentre que les transformacions per files son totalment innòcues per al sistema.

8.5 Determinant d'una matriu

El determinant d'una matriu *quadrada* $A \in M_n(\mathbb{R})$ és un nombre que es defineix per inducció de la manera següent:

Si $n = 1$, $\det(a_1^1) = |a_1^1| = a_1^1$.

Suposant definit el determinant de les matrius de $M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$, es defineix el determinant d'una matriu de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ com

$$\det \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_1^j \det A_1^j,$$

on A_i^j és la *matriu adjunta* d'a_i^j, és a dir, la matriu resultant d'eliminar la fila i i la columna j de la matriu A.

No és molt difícil comprovar (per inducció) que el determinant d'una matriu quadrada de mida $n \times n$ és la suma de $n!$ sumands, cadascun dels quals és el producte de n coeficients de la matriu, un de cada fila i columna, dotat d'un signe que depèn de la permutació de files i columnes de cada producte:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{sgn(\sigma)} a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}.$$

De la simetria de l'expressió anterior es dedueix que

a) El determinant d'una matriu es pot desenvolupar per qualsevol fila i no només per la primera.

b) El determinant d'una matriu també es pot desenvolupar per columnes, i no només per files.

En particular, això comporta que el determinant d'una matriu sempre coincideixi amb el de la seva transposada.

Les propietats següents dels determinants es poden demostrar (per inducció unes, i com a conseqüència d'aquestes les restants):

a) En intercanviar dues files (columnes), el determinant canvia de signe:

$$\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = -\det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n).$$

b) Si es multiplica una fila (columna) d'una matriu per un escalar λ, el determinant queda multiplicat per λ:

$$\det(a_1, \ldots, \lambda a_i, \ldots, a_n) = \lambda \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n).$$

c) Si una fila (columna) d'una matriu és suma de dues, aleshores el determinant és suma dels dos determinants corresponents:

$$\det(a_1, \ldots, a_i + a_i', \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) + \det(a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n).$$

d) Si dues files (columnes) d'una matriu són iguals, el seu determinant és zero:

$$\det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = 0.$$

e) Si una fila (columna) és tota zero, el determinant és zero:

$$\det(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) = 0.$$

f) Si una fila (columna) és múltipla d'una altra, el determinant és zero:

$$\det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, \lambda a_i, \ldots, a_n) = 0.$$

g) Si a una fila (columna) se li suma un múltiple d'una altra, el determinant no canvia:

$$\det(a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n).$$

Desenvolupant per la fila o columna adequada, és fàcil demostrar que el determinant d'una matriu triangular és igual al producte dels coeficients de la seva diagonal. Aquesta propietat, combinada amb les anteriors, indica que un bon mètode per al càlcul del determinant d'una matriu és l'aplicació de transformacions elementals per a la seva transformació a una forma reduïda o, al menys, a una forma triangular.

Determinant del producte de matrius. La demostració que el determinant del producte de dues matrius és igual al producte dels seus determinants és una mica massa laboriosa per estudiar-la aquí. Valgui simplement, doncs, la informació que

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Com a corol·lari d'aquesta propietat, s'obté que si A és una matriu invertible, aleshores $\det A \neq 0$ i $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

En particular, totes les matrius de canvi de base tenen determinant no nul i això comporta que totes les matrius d'un mateix endomorfisme (no importa la base) tinguin el mateix determinant, ja que

$$\det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \det A \det C = \frac{1}{\det C} \det A \det C = \det A.$$

Determinant i rang. El determinant d'una matriu A és diferent de zero si, i només si, els vectors columna (fila) de la matriu A són linealment independents, és a dir si, i només si, el rang de la matriu A és màxim. La demostració és com segueix. Designem per $v_1, \ldots, v_n$ els vectors columna de la matriu A. Si $v_1, \ldots, v_n$ són linealment independents, aleshores A és una matriu de canvi de base i $\det A \neq 0$. Si $v_1, \ldots, v_n$ són linealment dependents, aleshores un d'ells, suposem que v_i, es pot escriure com a combinació lineal de la resta i, per tant, el determinant té una columna igual a una combinació lineal de la resta de columnes. D'acord amb les propietats que hem estudiat, el determinant és zero.

Una conseqüència d'aquesta propietat és que el rang d'una matriu també pot ser vist com la dimensió del menor més gran de la matriu, que té determinant no nul.

Determinant i matrius invertibles. Hem vist que si A és una matriu invertible, aleshores $\det A \neq 0$. El més interessant és que l'afirmació recíproca també és certa: si $\det A \neq 0$ aleshores A és invertible. La demostració és immediata a partir del que ja hem esbrinat: si $\det A \neq 0$, aleshores A és la matriu de n vectors linealment independents. Si considerem l'endomorfisme f de la qual A és l'expressió matricial, el que estem afirmant és que les imatges per f d'una base de l'espai (de sortida) formen també una base de l'espai (d'arribada), de manera que tot element de l'espai (d'arribada) té una única expressió com a combinació lineal d'aquests, és a dir, té una única antiimatge. Així, doncs, f és bijectiva i, per tant, A és invertible.

8.6 Exercicis

Exercici 8.35. Determineu el rang dels següents sistemes de vectors de $\mathbb{R}^4$:

a) $(1, 1, 1, 1)$, $(0, 1, 2, -1)$, $(1, 0, -2, 3)$, $(2, 1, 0, -1)$.

b) $(1, 2, 5, -1)$, $(3, 6, 5, -6)$, $(2, 4, 0, -2)$.

c) $(1, 0, -3, 4)$, $(3, -1, 2, 4)$, $(11, -3, 0, 20)$, $(-2, 1, -5, 0)$.

Exercici 8.36. Calculeu el rang del sistema de vectors de $\mathbb{R}^n$ format per $a_1 = (1, 1, 0, \ldots, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $a_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, 1)$, $a_n = (1, 0, \ldots, 0, 1)$.

Exercici 8.37. Digueu:

a) Quin és el rang d'un sistema compatible determinat amb 5 equacions i 4 incògnites? I si el sistema és indeterminat?

b) Quantes equacions són necessàries (com a mínim) per tenir un sistema indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3? Quantes incògnites tindrà aquests sistema?

c) Pot ser compatible determinat un sistema amb 7 equacions i 10 incògnites?

d) Inventeu un sistema compatible determinat, un altre d'indeterminat i un altre d'incompatible, tots ells amb 3 incògnites i 4 equacions.

Exercici 8.38. Estudieu, segons els valors dels paràmetres, els sistemes següents:

a) $$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 3x + 2y = a \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} kx + y + z + t = 1 \\ x + ky + z + t = k \\ x + y + kz + t = k^2 \\ x + y + z + kt = k^3 \end{cases}$$

Exercici 8.39. Un endomorfisme f d'un espai vectorial E té en certa base la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Trobeu $f^{-1}(0)$ segons els valors d'a.

Exercici 8.40. Es considera a $\mathbb{R}^5$ el subespai dels elements $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tals que $x_3 = x_1 + x_2 - x_4$, $x_5 = x_2 - x_1$. Determineu-ne una base.

Exercici 8.41. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que en certa base té associada la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculeu l'antiimatge del vector $(-1, 1)$.

Exercici 8.42. Discutiu i resoleu el sistema resultant de l'Exercici 4.26.

Exercici 8.43.

a) Resoleu el sistema d'equacions obtingut a l'Exercici 4.27.

b) Les solucions negatives del sistema no tenen sentit, però les solucions fraccionàries sí que en tenen. Quines restriccions cal, doncs, afegir als apartats anteriors?

c) Quantes unitats de cada producte s'obtindrien en el cas que es volgués maximitzar la producció de t tot mantenint la plena utilització de les quatre màquines?

d) Quina és la producció dels quatre productes que maximitza la producció de w, tot mantenint la plena utilització de les quatre màquines?

e) Refeu tots els càlculs per a una utilització completa de les quatre màquines durant 40 hores a la setmana, enlloc de 8 hores al dia.

f) En el cas del ple funcionament 40 hores a la setmana, com canviarien els resultats si la màquina C es trobés inactiva durant 8 hores a la setmana?

Exercici 8.44. Calculeu els determinants següents:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 5 & 4 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 & n \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix} x & m & n & p & q \\ x & x & m & n & p \\ x & x & x & m & n \\ x & x & x & x & m \\ x & x & x & x & x \end{vmatrix}$$

e) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercici 8.45. Proveu que

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1}(a+n-1).$$

9 Valors i vectors propis. Formes canòniques d'una matriu

En aquest apartat es presenten de forma molt condensada alguns resultats sobre valors i vectors propis, diagonalització i triangulació de matrius.

Aquest darrer és un problema diferent del de l'equivalència de matrius, tot i que de vegades es pot confondre amb aquest.

En el cas de l'equivalència de matrius, l'objectiu és trobar matrius P i Q que permetin que una matriu A es redueixi (per transformacions elementals) en una matriu més senzilla, en general diagonal, B. La relació entre A i B és $B = PAQ$. Si es pensa la matriu A com l'expressió matricial d'una aplicació lineal $E \xrightarrow{f} F$, les matrius P i Q corresponen a canvis de base a F i E respectivament.

En el cas de la reducció d'una matriu a una matriu diagonal o triangular, la qüestió és substancialment diferent en dos sentits:

a) la matriu A que es vol reduir és quadrada (es pot pensar com a matriu d'un endomorfisme $E \xrightarrow{f} E$),

b) el canvi de base que es vol aplicar és únic, és a dir, és el mateix a l'espai de sortida i el d'arribada.

Així doncs, una matriu A és *diagonalitzable* (respectivament *triangulable*) si existeix un canvi de base C tal que l'expressió d'A en la nova base és una matriu diagonal (resp. triangular), és a dir, tal que $D = C^{-1}AC$ és una matriu diagonal (triangular).

La primera conseqüència de la diferència entre aquest nou plantejament i el cas de la reducció per files i columnes és que ara ja no sempre és possible obtenir una resposta positiva: no totes les matrius són diagonalitzables ni triangulables.

Aquesta és una qüestió que té interès per a moltes aplicacions. Per exemple, les potències de matrius són molt més fàcils de calcular si la matriu es diagonalitza prèviament: si es vol calcular A^n i se sap que A és diagonalitzable mitjançant la matriu de canvi C, obtenim la matriu diagonal $D = C^{-1}AC$ i podem calcular A^n tot simplement així:

$$A^n = (CDC^{-1})^n = CDC^{-1}CDC^{-1} \overset{n}{\cdots} CDC^{-1} = CD^nC^{-1},$$

on D^n és molt fàcil de calcular, en tractar-se d'una matriu diagonal:

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_n)^n \end{pmatrix}.$$

Una cosa similar succeeix amb operacions tals com l'esponenciació de matrius i d'altres.

9.1 Vectors i valors propis

Observem que si D és una matriu diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

aleshores en multiplicar D per qualsevol vector e_i de la base d'E, es té $De_i = \lambda_i e_i$. En aquest cas, es diu que e_i és un *vector propi* de la matriu D, i que λ_i és un *valor propi* de D.

Si recordem que A i D representen, de fet, el mateix endomorfisme f d'E en bases diferents, hem de concloure que qualsevol vector (resp. valor) propi de D és en realitat un vector (valor) propi de de f i, per tant, també d'A:

$$Dv = \lambda v \quad \Longrightarrow \quad f(v) = \lambda v \quad \Longrightarrow \quad Av = \lambda v.$$

9.2 Diagonalització i triangulació de matrius

La qüestió de si una matriu A és diagonalitzable es redueix, doncs, a esbrinar si A té prou valors propis per formar la diagonal de D i si té prou vectors propis per formar una base de l'espai E i, per tant, una matriu C de canvi de base adequada: la matriu A d'un endomorfisme $E \xrightarrow{f} E$ és diagonalitzable si, i només si, existeix una base $u_1, \ldots, u_n$ d'E formada per vectors propis d'E.

Els valors propis d'una matriu A es poden calcular com les arrels del *polinomi* *característic* de la matriu:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_1^1 - x & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - x & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n - x \end{vmatrix}$$

Si anomenem $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les arrels de $p_A(x)$ i $k_1, \dots, k_r$ les seves mutiplicitats respectives, els resultats fonamentals sobre diagonalització i triangulació són els següents:

a) Vectors propis de valor propi diferent sempre són linealment independents.

   Comprovem-ho. Siguin $u_1, \dots, u_k$ vectors propis de valor propi λ, i $u \neq 0$ un vector propi de valor propi $\mu \neq \lambda$. Si u fos linealment dependent de $u_1, \dots, u_k$, podríem escriure $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$. Aleshores, $\mu u = Au = A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A u_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda u_i = \lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = \lambda u$, d'on $\lambda = \mu$.

b) A és diagonalitzable sii

   i) $\displaystyle\sum_{i=1}^r k_i = n$,

   ii) per a cada valor propi λ_i, el nombre de vectors propis linealment independents de valor propi λ_i és igual a k_i.

c) A és triangulable sii

   i) $\displaystyle\sum_{i=1}^r k_i = n$.

Convé saber que les matrius simètriques sempre diagonalitzen i, a més, sempre ho fan en base ortonormal (vegeu al darrer apartat la definició d'aquest concepte). No estem en condicions de donar la demostració d'aquesta afirmació en aquest curs introductori. De fet, aquesta té a veure amb el contingut dels apartats següents.

9.3 Exercicis

Exercici 9.46. Els estudis de poblacions animals inclouen la investigació de la distribució dels individus segons la seva edat. Suposant que la unitat de temps utilitzada siguin els anys, aquesta distribució es pot representar mitjançant el vector $n_t = (n_{0t}, n_{1t}, n_{2t}, \dots, n_{kt})$, on n_{it} és el nombre d'individus que tenen i anys d'edat en el moment t. Conegut el valor de n_t, el valor de n_{t+1} es pot obtenir a partir de n_t per multiplicació per una matriu M que recull la informació sobre les taxes de fertilitat i de supervivència. Concretament, simplificant una mica el procediment tot limitant-lo a les femelles de la població:

a) si $n_{i,t}$ és el nombre de femelles amb edat entre i i $i+1$ a l'instant t,

b) p_i és la probabilitat que una femella d'edat i en el moment t sobrevisqui fins al moment $t+1$,

c) f_i és el nombre de filles vives en el moment $t+1$ d'entre les que van nàixer entre l'instant t i l'instant $t+1$, de les femelles d'edat i en el instant t,

aleshores

$$\begin{aligned} n_{0,t+1} &= f_0 n_{0,t} + f_1 n_{1,t} + \ldots + f_k n_{k,t} \\ n_{i,t+1} &= p_{i-1} n_{i-1,t} \end{aligned}$$

és a dir,

$$n_{t+1} = \begin{pmatrix} n_{0,t+1} \\ n_{1,t+1} \\ n_{2,t+1} \\ \vdots \\ n_{k,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{0,t} \\ n_{1,t} \\ n_{2,t} \\ \vdots \\ n_{k,t} \end{pmatrix} = M n_t.$$

Suposem ara que els escarbats d'una certa varietat viuen sols tres anys i es reprodueixen durant el seu tercer any de vida. La taxa de supervivència del primer any de vida és $1/2$, el del segon any és $1/3$ i suposem que cada femella del grup d'edat entre els 2 i els 3 anys genera, en mitjana, 6 noves femelles vives.

a) Calculeu la matriu M de fertilitat i supervivència d'aquesta varietat d'escarbats.

b) Demostreu M té el vector propi $(6,3,1)$ de valor propi 1.

c) Demostreu que quan una població d'aquesta varietat d'escarbats comença amb una distribució per edats en la proporció $6:3:1$, aleshores es manté per sempre amb aquesta proporció.

Exercici 9.47. Sigui A una matriu tal que, aplicada al vector $v_1 = (1,2,1)$ el transforma en ell mateix, i té $v_2 = (1,-1,0)$ i $v_3 = (2,0,1)$ com a vectors propis de valors propis 0 i 1, respectivament. Calculeu, si és possible, una matriu M tal que $M^{-1}AM$ sigui diagonal.

Exercici 9.48. Sigui A una matriu quadrada, λ un valor propi d'A i v un vector propi de valor propi λ.

a) És $-2v$ un vector propi d'A? En cas afirmatiu, quin valor propi li correspon?

b) Es pot conèixer algun valor propi d'A^2?

Exercici 9.49. Digueu si la matriu A és diagonalitzable i, en cas afirmatiu, diagonalitzeu-la:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercici 9.50. Si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

obteniu els valors de λ tals que $\det(A - \lambda I) = 0$. A continuació, resoleu el sistema $(A - \lambda I)x = 0$ per a cada valor de λ.

Exercici 9.51. Trobeu els valors i els vectors propis de la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i determineu una matriu invertible P tal que la matriu $N = P^{-1}MP$ sigui diagonal.

Exercici 9.52. És diagonalitzable la matriu següent?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 9.53. Diagonalitzeu, si és possible, la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercici 9.54. Donada la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu T invertible tal que $T^{-1}MT$ sigui diagonal. Calculeu M^{10}.

Exercici 9.55. Demostreu que la matriu següent és diagonalitzable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 9.56. Diagonalitzeu la matriu A i deduïu quin és el valor de $\lim_{n\to\infty} A^n$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 9.57. Suposem que una certa població animal es classifica, segons els seus genotips, en tres grups T_0, T_1 i T_2. Les probabilitats que un individu de tipus T_i produeixi un descendent de tipus T_j es poden organitzar en una matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/18 \\ 0 & 1/2 & 4/9 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Com es pot esbrinar la probabilitat que un individu de tipus T_i tingui un descendent de tipus T_j a la k-èsima generació? Feu els càlculs pertinents.

Exercici 9.58.

a) Sigui D una matriu diagonal, amb tots els coeficients de la diagonal diferents de zero. Demostreu que D és invertible. Quina és la matriu inversa de D?

b) Sigui A una matriu invertible. Proveu que si A és diagonalitzable aleshores A^{-1} també ho és. Serveix la mateixa matriu de canvi de base per a la diagonalització d'A i d'A^{-1}?

Exercici 9.59. Considereu la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Digueu per a quins valors d'a i b la matriu A és diagonalitzable i, quan ho sigui, trobeu una matriu invertible M tal que $M^{-1}AM$ sigui diagonal.

Exercici 9.60. Es diu que dues matrius quadrades $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ són simultàniament diagonalitzables si existeix una matriu invertible $M \in M_n(\mathbb{R})$ (fixeu-vos: la mateixa per les dues) tal que $M^{-1}AM$ i $M^{-1}BM$ són diagonals.

a) Demostreu que si dues matrius diagonalitzen simultàniament, aleshores commuten.

b) Digueu si cadascuna de les tres parelles següents diagonalitzen simultàniament o no, i perquè. En el cas que ho facin, trobeu una matriu M que les diagonalitzi totes dues.

i) $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 15 & -9 \\ 30 & -18 \end{pmatrix}$.

ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

iii) $A = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -20 & 11 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ 20 & -13 \end{pmatrix}$.

10 Formes bilineals i quadràtiques. Mètrica

Al llarg de tota aquesta exposició hem interpretat les matrius com a representacions d'aplicacions lineals. No podem acabar sense al menys indicar, ni que sigui de forma limitada, que les mateixes matrius també es poden considerar com a representacions matricials d'altres menes d'aplicacions, com ara les formes bilineals que, per la seva utilitat, poden aparèixer amb freqüència en l'àmbit de la matemàtica aplicada, l'estadística i la investigació operativa.

10.1 Definició

Donats dos espais vectorials reals E i F, una forma bilineal sobre ells és una aplicació $E \times F \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ tal que

a) $f(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) \quad \forall \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in E,\ \forall \overrightarrow{v} \in F,$

b) $f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2}) \quad \forall \overrightarrow{u}, \in E,\ \forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in F,$

c) $f(\lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}, \lambda \overrightarrow{v}) \quad \forall \overrightarrow{u}, \in E,\ \forall \overrightarrow{v} \in F.$

Un exemple prototípic de forma bilineal és el producte escalar de vectors de $\mathbb{R}^n$:

$$f(x,y) = x \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

10.2 Expressió matricial de les formes bilineals

Donades $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base de l'espai E i $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de l'espai F, la forma bilineal $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ es pot expressar matricialment de la manera següent:

$$f(x,y) = x^T A y = (x_1, \ldots, x_m) \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \ldots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{on } a_i^j = f(e_i, u_j).$$

Quan $E = F$, es considera una única base $\{e_i\}$ d'E i la forma bilineal $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ s'expressa matricialment de la mateixa manera, $f(x, y) = x^T Ay$ amb $A = (a_i^j)$, on ara $a_i^j = f(e_i, e_j)$ $\forall i, j = 1, \ldots, n$.

Observeu com són els canvis de base de les matrius que representen aquestes formes bilineals. Suposem que A és la matriu de la forma bilineal f de l'espai vectorial E en una certa base $\{e_i\}$. Suposem que disposem d'una nova base $\{e_i'\}$ d'E i que volem conèixer l'expressió matricial de f en la base $\{e_i'\}$. Sigui C la matriu del canvi de base, és a dir, la matriu tal que $x = C\overline{x}$ per a tot vector d'E, on x simbolitza les coordenades del vector en la base $\{e_i\}$ i $\overline{x}$ simbolitza les coordenades del mateix vector en la base $\{e_i'\}$. Aleshores:

$$f(x, y) = x^T Ay = (C\overline{x})^T A(C\overline{y}) = (\overline{x})^T C^T AC(\overline{y}),$$

de manera que la matriu de f en la nova base és $B = C^T AC$. Observeu la subtil diferència amb el cas en què la matriu representa una aplicació lineal.

10.3 Formes bilineals simètriques

Seguint amb el cas $E = F$, té sentit preguntar-se per la relació entre $f(x, y)$ i $f(y, x)$: una forma bilineal s'anomena *simètrica* quan $f(x, y) = f(y, x)$ $\forall x, y \in E$. En aquest cas, la matriu A associada a f és simètrica.

Un exemple prototípic de forma bilineal simètrica és el producte escalar a $\mathbb{R}^n$.

Alguns termes relatius a les formes bilineals simètriques:

a) Una forma bilineal simètrica es denomina *no degenerada* quan, per a tot $x \in E$ existeix algun $y \in E$ tal que $f(x, y) \neq 0$. Una altra manera d'expressar aquesta condició és exigir que per a tot $x \in E$ es tingui $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Una forma bilineal simètrica es denomina *positiva* (o també *semidefinida positiva*) quan $f(x, x) \geq 0$ $\forall x \in E$. Anàlogament, es denomina *negativa* (o també *semidefinida negativa*) quan $f(x, x) \leq 0$ $\forall x \in E$.

c) Una forma bilineal simètrica es denomina *definida positiva* quan $f(x, x) > 0$ $\forall x \in E$, $x \neq 0$. Anàlogament, es denomina *definida negativa* quan $f(x, x) < 0$ $\forall x \in E$, $x \neq 0$.

10.4 Formes quadràtiques

Una *forma quadràtica* sobre un espai vectorial E és una aplicació $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que, en una base qualsevol d'E té una expressió del tipus $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_i^j x_i x_j$, on $a_i^j = a_j^i$ $\forall i, j$. Matricialment,

$$q(x) = x^T Ax = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \text{on } A \text{ és una matriu simètrica.}$$

Tota forma bilineal simètrica sobre E, f, indueix una forma quadràtica $q_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $q_f(x) = f(x, x)$.

Anàlogament al cas de les formes bilineals simètriques, es tenen les definicions següents per a formes quadràtiques:

a) Una forma quadràtica es denomina *no degenerada* quan, per a tot $x \in E$, es té $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Una forma quadràtica es denomina *positiva* (o també *semidefinida positiva*) quan $q(x) \geq 0\ \forall x \in E$. Anàlogament, es denomina *negativa* (o també *semidefinida negativa*) quan $q(x) \leq 0\ \forall x \in E$.

c) Una forma bilineal simètrica es denomina *definida positiva* quan $q(x) > 0$ $\forall x \in E$, $x \neq 0$. Anàlogament, es denomina *definida negativa* quan $q(x) < 0$ $\forall x \in E$, $x \neq 0$. Quan existeixen elements $x_1, x_2 \in E$ per als quals q pren signes diferents, $q(x_1) < 0 < q(x_2)$, la forma quadràtica s'anomena *indefinida*.

Els resultats següent són caracteritzacions molt emprades de les formes quadràtiques, $q(x) = x^T A x$, definides positives i definides positives.

Són equivalents:

a) La forma q és definida positiva.

b) Per a tot $x \neq 0$, es té $q(x) > 0$.

c) Tots els valors propis d'A son estrictament positius.

d) Tots els menors principals de la matriu A tenen determinant estrictament positiu.

Són equivalents:

a) La forma q és definida negativa.

b) Per a tot $x \neq 0$, es té $q(x) < 0$.

c) Tots els valors propis d'A son estrictament negatius.

d) Els determinants dels menors principals de la matriu A tenen signes alternats, començant per $\det A_1 < 0$.

10.5 Producte escalar

En general, un *producte escalar* a $\mathbb{R}^n$ és qualsevol forma bilineal en $\mathbb{R}^n$ que sigui simètrica, definida positiva i no degenerada.

Exemples:

a) L'operació següent és un producte escalar:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

b) Tanmateix, hi ha molts altres exemples de productes escalars, a espais vectorials de tots tipus, inclosos els de dimensió infinita. A tall d'exemple, podeu comprovar que l'operació següent és un producte escalar a l'espai $E = \mathbb{R}[x]$:

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (p(x), q(x)) & \longmapsto & \int_0^1 p(x)q(x)dx \end{array}$$

Una de les propietats més emprades del producte escalar és la *desigualtat de Cauchy-Schwarz*:

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v),$$

on la desigualtat és estricta en general, i és una igualtat exactament quan els vectors u i v són linealment independents.

La demostració d'aquesta desigualtat és com segueix: sigui $w = u - \lambda v$, on $\lambda \in \mathbb{R}$. Aleshores $0 \leq w \cdot w = (u - \lambda v)(u - \lambda v) = u \cdot u - 2\lambda u \cdot v + \lambda^2 v \cdot v$. Per tant, aquest polinomi de grau dos en la variable λ ha de tenir discriminant negatiu o zero: $0 \geq \Delta = b^2 - 4ac = (2u \cdot v)^2 - 4(v \cdot v)(u \cdot u)$, d'on $(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$. El cas de la igualtat es dóna quan el discriminant s'anul·la, és a dir, quan el polinomi té una arrel, o sigui quan $0 = w = u - \lambda v$, és a dir, quan u i v són linealment dependents.

10.6 Norma

Una *norma* a $\mathbb{R}^n$ és una aplicació

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \|v\| \end{array}$$

tal que

a) $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n \quad$ i $\quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \ \forall v \in \mathbb{R}^n$

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \ \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

La tercera d'aquestes propietats es coneix amb el nom de *desigualtat triangular*.

Exemple: Les següents són diverses normes a l'espai $\mathbb{R}^n$ (vegeu l'Exercici 4.67):

a) $\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

b) $\|x\|_1 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

c) $\|x\|_\infty = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$

Tot producte escalar indueix una norma que es defineix com $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. La comprovació d'aquesta afirmació, que es deixa al lector, inclou verificar que aquesta funció està ben definida i que, efectivament, compleix les tres propietats anteriors. Per demostrar la desigualtat triangular és convenient utilitzar la desigualtat de Cauchy-Schwarz.

Exemple: En particular, la norma derivada del producte escalar ordinari és la primera dels tres exemples anteriors: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Tanmateix, no tota norma prové d'un producte escalar (vegeu l'Exercici 4.67).

10.7 Distància

Una *distància* a $\mathbb{R}^n$ és una aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & d(P, Q) \end{array}$$

tal que

a) $d(P, Q) \geq 0 \; \forall P, Q \in \mathbb{R}^n \quad \text{i} \quad d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

b) $d(P, Q) = d(Q, P) \; \forall P, Q \in \mathbb{R}^n$

c) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) \; \forall P, Q \in \mathbb{R}^n$

La tercera d'aquestes propietats es coneix amb el nom de *desigualtat triangular*.

Exemple: Les següents són diverses distàncies a l'espai $\mathbb{R}^n$ (la comprovació es deixa al lector):

a) $d(P, Q) = d((p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n)) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \ldots + (q_n - p_n)^2}$

b) $d_1(P, Q) = d_1((p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n)) = |q_1 - p_1| + \ldots + |q_n - p_n|$

c) $d_\infty(P, Q) = d_\infty((p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n)) = \max(|q_1 - p_1|, \ldots, |q_n - p_n|)$

Tota norma indueix una distància que es defineix com $d(P, Q) = \|Q - P\|$. Les tres distàncies de l'exemple anterior provenen de les tres normes dels exemples de l'apartat anterior. La comprovació d'aquestes afirmacions es deixa al lector.

10.8 Ortogonalitat

Dos vectors u i v no nuls s'anomenen *ortogonals* si $u \cdot v = 0$.

Una base $e_1, \ldots, e_n$ d'un espai vectorial E s'anomena *ortonormal* quan $\forall i, j$ es té $e_i \cdot e_j = \delta_{i,j}$, és a dir, quan els vectors de la base són perpendiculars dos a dos i unitaris.

Si A és la matriu del canvi de base entre dues bases ortonormals, aleshores

a) $A^{-1} = A^T$,

b) $\det A = \pm 1$.

La demostració d'aquestes dues afirmacions és la següent: suposem que $A = (a_i^j)$, amb $e'_j = \sum_{i=1}^n a_i^j e_i$. Com que tant la base $\{e_i\}$ com la base $\{e'_i\}$ són ortonormals, es té:

$$\begin{aligned} I_i^j &= \delta_{ij} = e'_i \cdot e'_j = \sum_{r,s=1}^n a_r^i a_s^j e_r \cdot e_s \\ &= \sum_{r,s=1}^n a_r^i a_s^j \delta_{r,s} = \sum_{r=1}^n a_r^i a_r^j = \sum_{r=1}^n (A^T)_i^r (A)_r^j = (A^T A)_i^j. \end{aligned}$$

Per tant, $A^T A = I$ i, com que A és un canvi de base, és invertible, de manera que $A^{-1} = A^T$.

D'altra banda, $1 = \det I = \det(A^T A) = \det A^T \det A = \det A \det A = (\det A)^2$ i, en conseqüència, $\det A = \pm 1$.

Aquestes matrius s'anomenen *matrius ortogonals*.

10.9 Exercicis

Exercici 10.61. Una forma bilineal f sobre $\mathbb{R}^3$ està caracteritzada per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Obteniu $f(x, y)$.

b) Determineu la matriu de f respecte de la base $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

Exercici 10.62. Quines són les formes quadràtiques associades a les formes bilineals que tenen les matrius següents?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 10.63. Determineu la matriu de la forma quadràtica sobre $\mathbb{R}^3$ definida per $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_3^2$.

Exercici 10.64. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$.

a) Demostreu que f és una forma bilineal.

b) Quines característiques té?

c) És ortonormal la base canònica?

d) Trobeu, per tots els mètodes possibles, les imatges de

   i) $(2,3)$ i $(-1,2)$,
   ii) $(-3,-1)$ i $(4,-1)$,
   iii) $(5,7)$ i $(-2,11)$.

e) Trobeu la matriu de f en la base $(1,-2)$, $(2,2)$.

Exercici 10.65. Una forma bilineal té la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

en la base de $\mathbb{R}^3$ formada per $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ i $(1,1,0)$. Expresseu-la en forma literal (per això, trobeu la matriu en la base canònica).

Exercici 10.66. Obteniu, en cada cas, una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada pels vectors propis de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 10.67. A partir de la desigualtat triangular per la norma, demostreu la desigualtat següent:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|.$$

Exercici 10.68. Fent servir la desigualtat de Cauchy-Schwarz, demostreu que si una norma prové d'un producte escalar, $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, aleshores aquest producte escalar es pot escriure a partir de la norma de la manera següent:

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Exercici 10.69. Comproveu que les dues operacions següents són normes a $\mathbb{R}^n$:

a) $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

b) $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$.

Comproveu que no provenen d'un producte escalar. Per això, utilitzeu el resultat de l'Exercici anterior i comproveu que els productes escalars definits a partir d'aquestes normes no són, en realitat, operacions qualificables de productes escalars.

Bibliografia

A continuació es presenten algunes referències que poder ser útils tant per ampliar els temes com per fer consultes puntuals.

- S.R. Searle, Matrix algebra useful for statistics, Wiley, 1982.

  Es tracta d'un llibre de text de càlcul matricial pensat per a estudiants d'estadística. Inclou tots els temes exposats en aquesta part de l'assignatura, i molt més. Conté gran nombre d'exemples provenint del camp de l'estadística, així com algun capítol específicament dedicat a aplicacions estadístiques.

- M. Castellet i I. Llerena, Àlgebra lineal i geometria, Ed. UAB, 2000.

  Es tracta d'un text molt complet, formalment molt precís, i d'un nivell d'abstracció i de generalitat força superior al d'aquesta exposició. Molt útil per disposar de les definicions i proposicions en la seva formulació més general.

- F. Ayres, Matrices, Ed. McGraw-Hill, 1969.

  Es tracta d'un antic i encara molt emprat llibre de problemes de càlcul matricial (conté breus resums de conceptes i propietats). Pot ser útil a qui vulgui desenvolupar habilitats de caràcter calculístic per resoldre sistemes d'equacions, obtenir inverses, calcular determinants, etc.