Master en Estadística e Investigación Operativa

Matemáticas

Álgebra lineal
(parte final ampliada)

Vera Sacristán

Departament de Matemàtica Aplicada II
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

10 Formas bilineales y cuadráticas **86**

10.1 Definición . . . 86
10.2 Expresión matricial de las formas bilineales . . . 86
10.3 Formas bilineales simétricas . . . 87
10.4 Formas cuadráticas . . . 87
10.5 Producto escalar . . . 88
10.6 Norma . . . 89
10.7 Ortogonalidad . . . 90
10.8 Ejercicios . . . 90

11 Matrices simétricas y diagonalización **92**

12 Valores y vectores singulares **92**

12.1 Ejercicios . . . 94

Bibliografia **95**

10 Formas bilineales y cuadráticas

A lo largo de toda esta exposición hemos interpretado las matrices como representaciones de aplicaciones lineales. No podemos acabar sin indicar, aunque sea de forma limitada, que las mismas matrices también se pueden ver como representaciones matriciales de otros tipos de aplicaciones, como son las formas bilineales que, por su utilidad, aparecen con frecuencia en el ámbito de la matemática aplicada, la estadística y la investigación operativa.

10.1 Definición

Dados dos espacios vectoriales reales E y F, una forma bilineal sobre ellos es una aplicación $E \times F \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ tal que

a) $f(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) \quad \forall \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in E,\ \forall \overrightarrow{v} \in F,$

b) $f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2}) \quad \forall \overrightarrow{u}, \in E,\ \forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in F,$

c) $f(\lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}, \lambda \overrightarrow{v}) \quad \forall \overrightarrow{u}, \in E,\ \forall \overrightarrow{v} \in F.$

Un ejemplo prototípico de forma bilineal es el producto escalar de vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$f(x,y) = x \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

10.2 Expresión matricial de las formas bilineales

Dadas $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base del espacio E i $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base del espacio F, la forma bilineal $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede expresar matricialmente de la manera siguiente:

$$f(x,y) = x^T A y = (x_1, \ldots, x_m) \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \ldots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \text{on } a_i^j = f(e_i, u_j).$$

Quando $E = F$, se considera una única base $\{e_i\}$ de E y la forma bilineal $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ se expresa matricialmente de la misma manera, $f(x,y) = x^T A y$ con $A = (a_i^j)$, donde ahora $a_i^j = f(e_i, e_j)\ \forall i, j = 1, \ldots, n$.

Obsérvese como son los cambios de base de las matrices que representan estas formas bilineales. Supongamos que A es la matriz de la forma bilineal f del espacio vectorial E en una cierta base $\{e_i\}$. Supongamos que disponemos de una nueva base $\{e'_i\}$ d'E y que queremos conocer la expresión matricial de f en la base $\{e'_i\}$. Sea C la matriz del cambio de base, es decir, la matriz tal que $x = C\overline{x}$ para todo vector de E, donde x simboliza las coordenadas del vector en la base $\{e_i\}$ y $\overline{x}$ simboliza las coordenadas del mismo vector en la base $\{e'_i\}$. Entonces:

$$f(x,y) = x^T A y = (C\overline{x})^T A (C\overline{y}) = (\overline{x})^T C^T A C (\overline{y}),$$

de manera que la matriz de f en la nueva base es $B = C^T AC$. Obsérvese la sutil diferencia con el caso en que la matriz representa una aplicación lineal.

10.3 Formas bilineales simétricas

Siguiendo con el caso $E = F$, tiene sentido preguntarse por la relación entre $f(x, y)$ y $f(y, x)$: una forma bilineal se llama *simétrica* cuando $f(x, y) = f(y, x)\ \forall x, y \in E$. En tal caso, la matriz A asociada a f es simétrica.

Un ejemplo prototípico de forma bilineal simétrica es el producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Algunos términos relativos a las formas bilineales simétricas:

a) Una forma bilineal simétrica se denomina *no degenerada* cuando, para todo $x \in E$ existe algún $y \in E$ tal que $f(x, y) \neq 0$. Otra manera de expresar esta condición es exigir que para todo $x \in E$ se tenga $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Una forma bilineal simétrica se denomina *positiva* (o también *semidefinida positiva*) cuando $f(x, x) \geq 0\ \forall x \in E$. Análogamente, se denomina *negativa* (o también *semidefinida negativa*) cuando $f(x, x) \leq 0\ \forall x \in E$.

c) Una forma bilineal simétrica se denomina *definida positiva* cuando $f(x, x) > 0\ \forall x \in E$, $x \neq 0$. Análogamente, se denomina *definida negativa* cuando $f(x, x) < 0\ \forall x \in E$, $x \neq 0$.

10.4 Formas cuadráticas

Una *forma cuadrática* sobre un espacio vectorial E es una aplicación $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que, en una base cualquiera de E tiene una expresión del tipo $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^j x_i x_j$, on $a_i^j = a_j^i\ \forall i, j$. Matricialmente,

$$q(x) = x^T Ax = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz simétrica.

Toda forma bilineal simétrica sobre E, f, induce una forma cuadrática $q_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $q_f(x) = f(x, x)$.

Análogamente al caso de les formas bilineales simétricas, se tienen las definiciones siguientes para formas cuadráticas:

a) Una forma cuadrática se denomina *no degenerada* cuando, para todo $x \in E$, se tiene $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Una forma cuadrática se denomina *positiva* (o también *semidefinida positiva*) cuando $q(x) \geq 0\ \forall x \in E$. Análogamente, se denomina *negativa* (o también *semidefinida negativa*) cuando $q(x) \leq 0\ \forall x \in E$.

c) Una forma bilineal simétrica se denomina *definida positiva* cuando $q(x) > 0$ $\forall x \in E$, $x \neq 0$. Análogamente, se denomina *definida negativa* cuando $q(x) < 0$ $\forall x \in E$, $x \neq 0$. Quando existen elementos $x_1, x_2 \in E$ para los cuales q toma signos distintos, $q(x_1) < 0 < q(x_2)$, la forma cuadrática se denomina *indefinida*.

Los resultados siguientes son caracterizaciones muy útiles de las formas cuadráticas, $q(x) = x^T Ax$, definidas positivas y definidas negativas.

Son equivalentes:

a) La forma q es definida positiva.

b) Para todo $x \neq 0$, se tiene $q(x) > 0$.

c) Todos los valores propios de A son estrictamente positivos.

d) Todos los menores principales de la matriz A tienen determinante estrictamente positivo.

Son equivalentes:

a) La forma q es definida negativa.

b) Para todo $x \neq 0$, se tiene $q(x) < 0$.

c) Todos los valores propios de A son estrictamente negativos.

d) Los determinantes de los menores principales de la matriz A tienen signos alternados, empezando por $\det A_1 < 0$.

10.5 Producto escalar

En general, un *producto escalar* en $\mathbb{R}^n$ es cualquier forma bilineal en $\mathbb{R}^n$ que sea simétrica, definida positiva y no degenerada.

Ejemplos:

a) La operación siguiente es un producto escalar:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

b) Hay muchos otros ejemplos de productos escalares, en espacios vectoriales de todos tipos, incluso en los de dimensión infinita. A modo de ejemplo, puede comprobarse que la operación siguiente es un producto escalar en el espacio $E = \mathbb{R}[x]$:

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (p(x), q(x)) & \longmapsto & \int_0^1 p(x)q(x)dx \end{array}$$

Una de las propiedades más usadas del producto escalar es la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v),$$

en que la desigualdad es estricta en general, y es una igualdad exactamente cuando los vectores u y v son linealmente independientes.

La demostración de esta desigualdad es como sigue: sea $w = u - \lambda v$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $0 \leq w \cdot w = (u - \lambda v)(u - \lambda v) = u \cdot u - 2\lambda u \cdot v + \lambda^2 v \cdot v$. Por lo tanto , este polinomio de grado dos en la variable λ ha de tener necesariamente el discriminante negativo o cero: $0 \geq \Delta = b^2 - 4ac = (2u \cdot v)^2 - 4(v \cdot v)(u \cdot u)$, de donde $(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$. La igualdad se da cuando el discriminante se anula, es decir, cuando el polinomio tiene una raíz, o sea cuando $0 = w = u - \lambda v$, es decir, cuando u y v son linealmente dependientes.

10.6 Norma

Una *norma* en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \|v\| \end{array}$$

tal que

a) $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n \quad$ i $\quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \ \forall v \in \mathbb{R}^n$

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \ \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

La tercera de estas propiedades se conoce con el nombre de *desigualdad triangular.*

Ejempleo: Las siguientes son diversas normas en el espacio $\mathbb{R}^n$ (véase el Ejercicio 10.69):

a) $\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

b) $\|x\|_1 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

c) $\|x\|_\infty = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$

Todo producto escalar induce una norma que se define como $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. La comprobación de esta afirmación, que se deja al lector, incluye verificar que esta función está bien definida y que, efectivamente, cumple las tres propiedades anteriores. Para demostrar la desigualdad triangular es conveniente utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ejemplo: En particular, la norma derivada del producto escalar ordinario es el primero de los tres ejemplos anteriores: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Sin embargo, no toda norma proviene de un producto escalar (véase el Ejercicio 10.69).

10.7 Ortogonalidad

Dos vectores u i v no nulos se denominan *ortogonales* si $u \cdot v = 0$.

Una base $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio vectorial E se denomina *ortonormal* cuando $\forall i, j$ es té $e_i \cdot e_j = \delta_{i,j}$, es decir, cuando los vectores de la base son ortogonales dos a dos y unitarios.

Si A es la matriz del cambio de base entre dos bases ortonormales, entonces A se denomina *matriz ortogonal* y tiene las propiedades siguientes:

a) $A^{-1} = A^T$,

b) $\det A = \pm 1$,

c) $||Ax|| = ||x||$ para todo vector x.

La demostración de la primera de estas afirmaciones es la siguiente: supongamos que $A = (a_i^j)$, con $e'_j = \sum_{i=1}^n a_i^j e_i$. Puesto que tanto la base $\{e_i\}$ como la base $\{e'_i\}$ son ortonormales, se tiene:

$$\begin{aligned} I_i^j &= \delta_{ij} = e'_i \cdot e'_j = \sum_{r,s=1}^n a_r^i a_s^j e_r \cdot e_s \\ &= \sum_{r,s=1}^n a_r^i a_s^j \delta_{r,s} = \sum_{r=1}^n a_r^i a_r^j = \sum_{r=1}^n (A^T)_i^r (A)_r^j = (A^T A)_i^j. \end{aligned}$$

Per consiguiente, $A^T A = I$ y, puesto que A es un cambio de base, es invertible, de manera que $A^{-1} = A^T$.

En segundo lugar, $1 = \det I = \det(A^T A) = \det A^T \det A = \det A \det A = (\det A)^2$ y, en consecuencia, $\det A = \pm 1$.

Finalmente, consideremos un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ cualquiera. Tenemos $x = \sum x_i e_i$, de donde $||Ax|| = ||A \sum x_i e_i|| = ||\sum x_i A e_i|| = ||\sum x_i e'_i|| = \sqrt{\sum x_i^2} = ||x||$.

10.8 Ejercicios

Ejercicio 10.60. Una forma bilineal f sobre $\mathbb{R}^3$ está caracterizada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Obtenga $f(x, y)$.

b) Determine la matriz de f respecto de la base $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

Ejercicio 10.61. ¿Cuáles son las formas cuadráticas asociadas a las formas bilineales que tienen las matrices siguientes?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10.62. Determine la matriz de la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_3^2$.

Ejercicio 10.63. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$.

a) Demuestre que f es una forma bilineal.

b) ¿Qué características tiene?

c) ¿Es ortonormal la base canónica?

d) Halle, por todos los métodos que pueda, las imágenes de

  i) $(2, 3)$ i $(-1, 2)$,
  ii) $(-3, -1)$ i $(4, -1)$,
  iii) $(5, 7)$ i $(-2, 11)$.

e) Calcule la matriz de f en la base $(1, -2)$, $(2, 2)$.

Ejercicio 10.64. Una forma bilineal tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

en la base de $\mathbb{R}^3$ formada por $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ i $(1, 1, 0)$. Exprésela en forma literal (para ello, calcule la matriz en la base canónica).

Ejercicio 10.65. Obtenga, en cada caso, una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de les matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10.66. A partir de la desigualdad triangular de la norma, demuestre la desigualdad siguiente:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|.$$

Ejercicio 10.67. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que si una norma proviene de un producto escalar $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ entonces dicho producto escalar se escribe a partir de la norma de la manera siguiente:

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Ejercicio 10.68. Compruebe que las doss operaciones siguientes son normas en $\mathbb{R}^n$:

a) $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

b) $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$.

Compruebe que no provienen de un producto escalar. Para ello, use el resultado del ejercicio anterior y compruebe que los productos escalares definidos a partir de estas normas no son, en realidad, operaciones calificables de productos escalares.

11 Matrices simétricas y diagonalización

Aunque no estamos en condiciones de demostrarlo en este curso, es útil conocer el resultado siguiente:

Si una matriz es simétrica, entonces diagonaliza en base ortonormal.

12 Valores y vectores singulares

Análogamente al caso de diagonalización de matrices cuadradas, a veces se plantea la cuestión de la "diagonalización"de matrices que no son cuadradas.

Concretamente, dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, que corresponde a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, se trata de hallar una matriz Σ que sea diagonal –excepto por la existencia de filas o columnas de ceros– y que represente la misma aplicación f en otras bases ortonormales $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ de $\mathbb{R}^m$. Es decir, se trata de hallar $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$A = U\Sigma V^T,$$

para ciertas $U \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ y $V \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices ortogonales, de tal forma que

Σ tenga la expresión siguiente:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, donde r es el rango de A.

Los coeficientes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ se llaman *valores singulares* de la matriz A. Los vectores columna de la matriz V se llaman *vectores propios por la derecha* y los de U *vectores propios por la izquierda* de la matriz A.

Algunas propiedades importantes:

a) Los valores singulares de una matriz A son las raíces cuadradas positivas de los valores propios no nulos de $A^T A$.

b) Los vectores propios $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ por la derecha de la matriz A se obtienen a partir de los valores propios de $A^T A$, normalizándolos y completando la base en caso necesario (esto es, si $r < n$).

c) Los vectores propios $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m}$ por la izquierda de la matriz A se obtienen a partir de $\overrightarrow{u_i} = \frac{A\overrightarrow{v_i}}{\sigma_i}$ y completando la base en caso necesario (esto es, si $r < m$).

d) Las tres propiedades anteriores se pueden dualizar para el caso en que se prefiera considerar la matriz AA^T.

e) Los valores singulares σ_1 y σ_n de la matriz A son, respectivamente, los valores máximo y mínimo de $||A\overrightarrow{x}||$ para cualquier vector unitario $\overrightarrow{x}$.

La propiedad a) es cierta porque si $A = U\Sigma V^T$ entonces

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T$$

y, por lo tanto, $A^T A$ y $\Sigma^T \Sigma$ tienen los mismos valores propios, y éstos son $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, puesto que

$$\Sigma^T \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r^n & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

En cuanto a las propiedades b) y c), es inmediato que $A\overrightarrow{v_i} = \sigma_i \overrightarrow{u_i}$ para todo i entre 1 y r. Por consiguiente, $AV = \Sigma U$ si nos restringimos a $U = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_r}) \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$, $\Sigma \in M_{r\times r}(\mathbb{R})$ y $V = (v_1, \ldots, v_r) \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$. Esto es, $A = U\Sigma V^T$. Y la igualdad se mantiene si completamos las bases de las matrices U y de V, ya que para el resto de valores i y j mayores que r la matriz Σ sólo presenta coeficientes iguales a cero. Por otra parte, el hecho de que las matrices U y V así formadas sean ortogonales no es inmediato, y se dará por cierto en esta exposición.

La propiedad d es fácil de demostrar, dualizando las demostraciones anteriores.

La propiedad e) se demuestra del modo siguiente:

$$||A\overrightarrow{x}|| = ||\Sigma\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 x_n^2} \leq \sigma_1\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sigma_1||\overrightarrow{x}|| = \sigma_1$$
$$||A\overrightarrow{x}|| = ||\Sigma\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 x_n^2} \geq \sigma_n\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sigma_n||\overrightarrow{x}|| = \sigma_n$$

Las propiedades a), b) y c) permiten hallar las matrices Σ, U y V.

12.1 Ejercicios

Ejercicio 12.69. Halle la descomposición singular de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12.70. Calcule la descomposición en valores singulares de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 12.71. Halle la descomposición singular de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12.72. Calcule la descomposición en valores singulares de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bibliografía

A continuación se presentan algunas referencias que pueden ser útiles tanto para ampliar los temas como para hacer consultas puntuales.

- S.R. Searle, Matrix algebra useful for statistics, Wiley, 1982.

  Se trata de un libro de texto de cálculo matricial pensado para estudiantes de estadística. Incluye todos los temas expuestos en esta parte de la asignatura, y mucho más. Contiene gran número de ejemplos del campo de la estadística, así como algún capítulo específicamente dedicado a aplicaciones estadísticas.

- M. Castellet i I. Llerena, Àlgebra lineal i geometria, Ed. UAB, 2000.

  Se trata de un texto muy completo, formalmente muy preciso, y de un nivel de abstracción y de generalidad bastante superior al de la presente exposición. Muy útil para disponer de las definiciones y proposiciones en su formulación más general.

- F. Ayres, Matrices, Ed. McGraw-Hill, 1969.

  Se trata de un viejo y todavía muy usado libro de problemas de cálculo matricial (contiene breves resúmenes de conceptos y propiedades). Muy útil para quien desee desarrollar habilidades en la resolución de sistemas de ecuaciones, obtención de inversas, cálculo de determinants, diagonalización, etc..