Màster en Estadística i Investigació Operativa

Matemàtiques

Introducció a la combinatòria

Vera Sacristán

Departament de Matemàtica Aplicada II
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

3 Introducció a la combinatòria

Aquest apartat es dedica a les qüestions més bàsiques sobre el comptar: s'hi exposen alguns principis molt elementals, com la regla del producte, la de la suma i el principi d'inclusió-exclusió, i s'hi introdueixen les nocions mínimes necessàries per a comptar seleccions amb ordre i sense ordre, tot definint els nombres binomials i multinomials.

3.1 Exemples introductoris

Telèfons. Els números de telèfon a la província de Barcelona tenen dos dígits fixos (93) seguits de 7 dígits variables. Quin és el nombre total de números de telèfon teòricament disponibles?

Probabilitat discreta. Quan hom fa un experiment, és interessant comptar el nombre d'outputs favorables d'entre tots els outputs possibles, ja que a partir d'aquestes dues dades es pot calcular la probabilitat d'èxit de l'experiment.

Complexitat algorísmica. El password o paraula clau d'un sistema informàtic, el codi secret d'una targeta bancària, solen estan formats per entre 4 i 8 caràcters. Quants passords diferents és possible formar? Quant costa intentar trencar un password explorant tots els passwords possibles d'un nombre fixat de caràcters? És factible fer-ho en un temps raonable?

Aquests són tres dels innombrables exemples de la utilitat i l'aplicabilitat de comptar correctament.

3.2 Principis bàsics per comptar

3.2.1 La regla del producte

Exemple. Si totes les matrícules de cotxe tenen 4 dígits i tres lletres, quantes matrícules són teòricament possibles? La resposta és senzilla: $10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 26\cdot 26\cdot 26 =$ 175.760.000 matrícules diferents.

El principi de comptabilitat que hem aplicat es pot expressar de forma general de la manera següent: si una tasca es pot descompondre en dues parts, la primera de les quals es por fer de n_1 maneres i la segona de n_2 maneres, aleshores hi ha $n_1 n_2$ maneres de fer la tasca.

Dit en termes conjuntístics, la regla del producte es pot expressar de la manera següent: si A i B són conjunts qualssevol, aleshores $|A\times B| = |A||B|$. De fet, la regla val per qualsevol nombre finit de conjunts: si $A_1, \ldots, A_k$ són conjunts qualssevol, aleshores $|A_1 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \ldots |A_k|$.

3.2.2 La regla de la suma

Exemple. La meva filla començarà a anar a l'escola l'any vinent, i al meu barri hi ha 3 escoles: a l'escola A es fan 3 grups de 1er curs, a la B se'n fan 2 i a la C se'n fan 5. Quantes opcions diferents té la meva filla? La resposta és senzilla: la meva filla pot anar a $3+2+5=10$ grups diferents.

El principi de comptabilitat que hem aplicat es pot expressar de forma general de la manera següent: si una tasca es pot fer de n_1 maneres i una altra es pot fer de n_2 maneres, i les dues no es poden fer alhora, aleshores hi ha n_1+n_2 maneres de fer alguna de les tasques.

Dit en termes conjuntístics, la regla de la suma es pot expressar de la manera següent: si A i B són conjunts disjunts, aleshores $|A \cup B| = |A| + |B|$. Se fet, la regla val per qualsevol nombre finit de conjunts: si $A_1, \ldots, A_k$ són conjunts disjunts 2 a 2, aleshores $|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + \ldots + |A_k|$.

3.2.3 El principi d'inclusió-exclusió

Exemple. Quants nombres binaris de longitud 8 es poden escriure que comencin amb 1 o acabin amb 00? La resposta requereix un petit càlcul: hi ha $2^7 = 128$ nombres binaris de longitud 8 que comencen amb 1; hi ha $2^6 = 64$ nombres binaris de longitud 8 que acaben amb 00; i hi ha $2^5 = 32$ nombres binaris de longitud 8 que comencen amb 1 i acaben amb 00. Per tant, hi ha $128 + 64 - 32 = 160$ nombres binaris de longitud 8 que comencen amb 1 i acaben amb 00.

El principi de comptabilitat que hem aplicat es pot expressar de forma general de la manera següent: si una tasca es pot fer de n_1 maneres i una altra es pot fer de n_2 maneres, i les dues es poden fer alhora, aleshores la regla de la suma no es pot aplicar de forma directa, sinó que cal restar-li el nombre de maneres de fer les dues tasques simultàniament.

Dit en termes conjuntístics, el principi d'inclusió-exclusió es pot expressar de la manera següent: si A i B són conjunts qualssevol, aleshores $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Se fet, el principi val per qualsevol nombre finit de conjunts: si $A_1, \ldots, A_k$ són conjunts qualssevol, aleshores $|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + \ldots + |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{k-1} \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| - \ldots + (-1)^{k-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_k|$.

3.3 Seleccions amb ordre

Un fabricant de cotxes prepara la campanya de promoció d'un nou model que està a punt de llançar al mercat. Abans de dissenyar la campanya, porta a terme una enquesta en la qual demana a cada entrevistat que ordeni 10 qualitats predeterminades d'acord amb la importància que l'entrevistat els dóna a l'hora de triar un cotxe nou. Quantes són les respostes possibles?

3.3.1 Permutacions

Una *permutació* de n elements és una descripció ordenada d'aquests.

Una altra definició possible (equivalent a l'anterior) és la següent: una permutació d'un conjunt A de n elements és una aplicació bijectiva del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ en el conjunt A.

El nombre de permutacions de n elements és $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$.

Així, doncs, la resposta a la pregunta plantejada a l'exemple inicial és que hi ha $10! = 3.628.800$ respostes possibles.

3.4 Seleccions sense ordre

Quina és la probabilitat d'encertar els 6 nombres d'una loteria 6/49?

3.4.1 Combinacions

Una *combinació* de r elements d'un conjunt (univers) de n elements és una selecció no ordenada (és a dir, un subconjunt) de r elements de l'univers.

El nombre de combinacions de r elements d'un univers de n elements és $\frac{n!}{r!(n-r)!}$. Aquesta quantitat s'anomena nombre *binomial* i s'escriu

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Així, doncs, el nombre de combinacions de 6 nombres d'entre 49 és

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = 13.983.816,$$

i la probabilitat d'encertar els 6 nombres d'una loteria 6/49 és

$$\frac{1}{13.983.816} \simeq 0,00000007.$$

No sembla molt aconsellable jugar-hi!

3.4.2 Nombres multinomials

En lloc de formar un únic subconjunt de r elements a partir d'un univers de n elements, en mols casos és interessant formar k subconjunts, el primer amb n_1 elements, el segon amb n_2, etc. El nombre de combinacions possibles en aquest cas és

$$\begin{aligned}\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} &= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!(n-n_1-n_2-\dots n_k)!}.\end{aligned}$$

En el cas que $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Exercici 3.1 Quantes aplicacions existeixen d'un conjunt de m elements en un conjunt de n elements? Quantes d'aquestes aplicacions són injectives?

Exercici 3.2 Als Estats Units d'Amèrica i Canadà, es va haver de canviar el sistema de numeració telefònica que s'emprava els anys 60 per un de nou, que probablement també quedarà obsolet aviat. En els sistemes emprats fins ara, un número de telèfon consta de 10 dígits: 3 per al codi d'àrea, 3 per la subestació i 4 per a diferenciar cada l'usuari dins una mateixa subestació. Existeixen certes restriccions sobre els dígits que es poden emprar en cada cas. Concretament, el sistema vell sols acceptava números de la forma $NYX - NNX - XXXX$, i el sistema actual sols els accepta de la forma $NXX - NXX - XXXX$, on X pot prendre qualsevol valor entre 0 i 9, N pot prendre qualsevol valor entre 1 i 9, i Y ha de ser 0 o 1. Quants números de telèfon eren possibles amb el sistema antic? I amb l'actual? (Observació: la població dels Estats Units era de 278.058.881 persones, segons el cens del 2001, i la població estimada de Canadà el juliol de 2001 era de 31.592.804 persones. Això pot donar una idea de la sostenibilitat del sistema actual.)

Exercici 3.3 Cada usuari d'un sistema informàtic té un password format per 6 caràcters, en què cada caràcter és una lletra majúscula o un dígit. Cada password ha de contenir al menys un dígit. Quin és el nombre de passwords possibles?

Exercici 3.4 Quina és la probabilitat que un nombre enter positiu seleccionat aleatòriament de l'1 al 100 no sigui divisible per 2 o per 5?

Exercici 3.5 Quantes serien les respostes possibles, si l'enquesta demanés seleccionar sols 6 de les 10 qualitats i ordenar-les per importància?

Exercici 3.6 Trobeu la probabilitat que una ma de 5 cartes de poker contingui quatre cartes del mateix valor. Quina és la probabilitat d'un full (tres cartes d'un mateix valor i dues d'un mateix valor)?

Exercici 3.7 Es genera aleatòriament una seqüència de 10 bits. Quina és la probabilitat que al menys un d'aquests bits sigui 0?

Exercici 3.8 De quantes maneres es pot formar un equip de 5 jugadors a partir d'un conjunt de 10 persones candidates?

Exercici 3.9 Una Facultat de Matemàtiques i Estadística vol formar una comissió per analitzar els plans d'estudis actuals. La comissió estarà formada per 4 professors del departament de matemàtiques i 3 del departament d'estadística. Si el departament de matemàtiques té 35 professors i el d'estadística en té 20, quantes composicions diferents pot tenir la comissió?

Exercici 3.10 L'ADN és una cadena formada combinant en un cert ordre quatre elements, anomenats bases: adenina (A), guanina (G), timina (T) i citosina (C). Quin és el nombre de cadenes de longitud 10 que consten de 3 A's, 2 G's, 2 T's i 3 C's? Quin és el nombre d'aquestes que acaben amb AAG? (Les cadenes d'ADN al cos humà tenen longitud $2,1 \times 10^{10}$. Això pot donar una idea de la variabilitat de cadenes possibles.)

Bibliografia

A continuació es presenten algunes referències que poder ser útils tant per ampliar els temes com per fer consultes puntuals.

- Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, McGraw-Hill, 1999.

  Es tracta d'un molt bon manual universitari. Inclou tots els temes exposats en aquesta part de l'assignatura, i molt més. Així mateix, conté gran nombre d'exercicis i de propostes de projectes.

- Fred S. Roberts: Applied Combinatorics, Pearson Prentice Hall, 2004.

  Aquest també és un molt bon llibre de text. La seva orientació és una mica més teòrica i formal que l'anterior, i més centrada en temes estrictament combinatoris.