

**Informatizar las matemáticas,  
matematizar la informática  
(una propuesta docente)**

Vera Sacristán

29 de enero de 1999

MA2-IR-99-0006

# Informatizar las matemáticas, matematizar la informática (una propuesta docente)

Vera Sacristán

29 de enero de 1999

## Resumen

En este trabajo se ofrece un análisis de la relación entre matemáticas en informática, y de cómo esta relación ha ido modificando, y deberá aún modificar, los patrones clásicos de la enseñanza universitaria de las matemáticas.

El trabajo se centra, en concreto, en el análisis del papel de las matemáticas en los estudios de informática (Ingeniería Informática, Ingeniería Técnica Informática de Gestión e Ingeniería Técnica Informática de Sistemas), aunque también hace referencia al papel de la informática en los estudios de matemáticas (Licenciatura de Matemáticas y Diplomatura de Estadística).

En ambos casos, se analizan los efectos de la influencia mútua de estas dos ciencias y sus efectos en la enseñanza, presentando tanto un estudio general sobre la temática como un análisis concreto de la evolución de la Facultad de Matemáticas y Estadística y de la Facultad de Informática de Barcelona, de la Universitat Politècnica de Catalunya.

El trabajo se presenta organizado en los apartados siguientes:

1. ¿Qué es la informática?
2. Informática y matemáticas
3. La informática en la enseñanza de las matemáticas
4. La Facultad de Matemáticas y Estadística
5. Las matemáticas en la enseñanza de la informática
6. La Facultad de Informática de Barcelona
7. Perspectivas de futuro

# 1. ¿Qué es la informática?

La informática es un área de creación tan reciente y de evolución tan rápida que aún hoy los expertos discuten sobre su definición. En 1967, Newell, Perlis y Simon [17] sostenían que “*computer science is the study of computers and the major phenomena that surround them*”, en una definición que hoy en día puede parecer demasiado genérica y ambigua, pero que en su momento fue, probablemente, mucho más precisa de lo que hoy parece. Desde entonces, ha habido intentos cada vez más estrictos de definir qué campo cubre la informática, dentro de una larga discusión acerca de si se trata o no de una ciencia y de si deben o no identificarse las palabras *informática* y *programación*. Uno de los matemáticos más influyentes en el ámbito informático, D. Knuth, publicó en 1974 un precioso artículo [15] en el que definía así la informática: “*My favorite way to describe computer science is to say that it is the study of algorithms. An algorithm is a precisely-defined sequence of rules telling how to produce specified output information from given input information in a finite number of steps. [...] Perhaps the most significant discovery generated by the advent of computers will turn out to be that algorithms, as object of study, are extraordinarily rich in interesting properties; and furthermore, that an algorithmic point of view is a useful way to organize knowledge in general*”. Unos cuantos años más tarde, puntualizaba: “*My colleagues don’t all agree with me, but it turns out that the source of our disagreement is simply that my definition of algorithm is much broader than theirs: I tend to think of algorithms as encompassing the whole range of concepts dealing with well-defined processes, including the structure of data that is being acted upon as well as the structure of the sequence of operations being performed; some other people think of algorithms merely as miscellaneous methods for the solution of particular problems, analogous to individual theorems in mathematics*” [16].

De hecho, la informática es un área en tal evolución que un buen método para definirla es el enfoque histórico que utilizó en 1985 P. Denning, una autoridad en la disciplina. En [10] resumía la evolución de la informática desde los años cuarenta en una tabla, reproducida en la Tabla 1, en que además apuntaba el momento en que cada nueva subárea pasaba de ser un simple conjunto de técnicas más o menos pobremente estudiadas, a ser un conjunto de conocimientos y principios sólidos y bien nucleados:

---

|      |                      |
|------|----------------------|
| 1940 | Teoría               |
| 1945 | Computación numérica |
| 1950 | Arquitectura         |

|          |  |
|----------|--|
| 1960     | Lenguajes y metodología de la programación |
| 1968     | Algoritmos y estructuras de datos          |
| 1971     | Sistemas operativos                        |
| 1975     | Redes                                      |
| 1978     | Interfaz con el hombre                     |
| 1980     | Sistemas de bases de datos                 |
| 1982     | Programación concurrente                   |
| 1986 (?) | Inteligencia artificial                    |

---

Cuadro 1: Visión histórica de los contenidos de la informática.

Si hoy tuviéramos que prolongar la lista de Denning, probablemente los años 90 señalarían un punto de inflexión en que la informática se combina con otras áreas tales como la telecomunicación, y da lugar a lo que genéricamente algunos llaman tecnología multimedia.

Más recientemente, la Association for Computing Machinery (ACM) y el Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) formaron un comité conjunto con el objetivo de definir de forma precisa el campo de trabajo de los informáticos. Las conclusiones del comité se publicaron en 1989 [6]. En el informe, la informática aparece definida del modo siguiente: “*The discipline of computing is the systematic study of algorithmic processes that describe and transform information: their theory, analysis, design, efficiency, implementation, and application. The fundamental question underlying all computing is ‘What can be (efficiently) automated?’*”. El informe hace énfasis, además, en el hecho de que la informática abarca muchas más cosas que la simple programación: desde el diseño de *hardware* hasta el de sistemas operativos, pasando por la estructuración de bases de datos y la validación de modelos, la informática es una disciplina tecnológica que encuentra sus fundamentos en las matemáticas y la ingeniería. Más adelante, el informe precisa más, y estructura esta ciencia en nueve subáreas, que aparecen en la Tabla 2.

- 
- 1 Algoritmos y estructuras de datos
  - 2 Lenguajes de programación
  - 3 Arquitectura
  - 4 Computación numérica y simbólica
  - 5 Sistemas operativos
  - 6 Metodología e ingeniería del software
  - 7 Bases de datos y sistemas de información

- 8 Inteligencia artificial y robótica
  - 9 Comunicación hombre-ordenador
- 

Cuadro 2: Las nueve áreas de la informática, según el informe conjunto ACM-IEEE.

Tan importante como los contenidos, sin embargo, es la caracterización de la informática a través de sus paradigmas, de sus esquemas de razonamiento. El mismo informe los clasifica en tres grandes grupos: teoría, abstracción y diseño. Sus características específicas se recogen en la Tabla 3.

---

**Teoría:**

- a) caracterizar los objetos de estudio (definición),
- b) formular hipótesis sobre sus posibles interrelaciones (teorema),
- c) determinar si las relaciones son ciertas (demostración),
- d) interpretar los resultados.

**Abstracción:**

- a) formular una hipótesis,
- b) construir un modelo y hacer una predicción,
- c) diseñar un experimento y recoger datos,
- d) analizar los resultados.

**Diseño:**

- a) establecer requerimientos,
  - b) establecer especificaciones,
  - c) diseñar e implementar el sistema,
  - d) probar el sistema.
- 

Cuadro 3: Los tres paradigmas de la informática, según el informe conjunto ACM-IEEE.

A ningún matemático se le puede escapar, analizando la susodicha tabla, hasta qué punto esta descripción de los métodos de la informática la vincula a las matemáticas. Es el momento, pues, de analizar esta relación.

## 2. Informática y matemáticas

En su conocido libro [9], Alexandrov et al. caracterizan las matemáticas por los siguientes elementos:

- Abstracción, que trata fundamentalmente de las relaciones cuantitativas y formas espaciales, y aparece en una sucesión de grados de abstracción creciente.
- Precisión y rigor lógico. Irrefutabilidad de sus conclusiones.
- Excepcional amplitud de sus aplicaciones.

Sin embargo, no parece que ninguna de estas tres características permitan distinguir las matemáticas de la informática.

Al intentar dar respuesta a esta aparente confusión entre matemática e informática, nos encontramos, una vez más, con que D. Knuth ha dedicado diversos artículos (como siempre, piezas de una amenidad y de un interés sorprendentes) a estudiar la relación entre informática y matemática, entre el pensamiento algorítmico y el pensamiento matemático: “*Is there an essential difference between an algorithmic viewpoint and the traditional mathematical world-view? Do most mathematicians have an essentially different thinking process from that of most computer scientists?*” [16]. Sostiene Knuth en [15]: “*Like mathematics, computer science will be a subject which is considered basic to a general education. Like mathematics and other sciences, computer science will continue to be vaguely divided into two areas, which might be called “theoretical” and “applied”. Like mathematics, computer science will be somewhat different from the other sciences, in that it deals with man-made laws which can be proved, instead of natural laws which are never known with certainty. Thus, the two subjects will be like each other in many ways. The difference is in the subject matter and approach — mathematics dealing more or less with theorems, infinite processes, static relationships, and computer science dealing more or less with algorithms, finitary constructions, dynamic relationships*”. Algo semejante afirma el informe conjunto de la ACM y el IEEE [6]: “*Mathematics provides a framework for dealing precisely with notions of ‘what is’. Computation provides a framework for dealing precisely with notions of ‘how to’*”.

Así pues, muchos de los modelos de razonamiento que hemos reseñado son comunes a las matemáticas y la informática. Hay, sin embargo, alguna notable excepción. Un claro ejemplo es el manejo del infinito. Los espacios de dimensión infinita parecen ser de poca relevancia para los informáticos, mientras que las matemáticas los han aplicado de muchas maneras. Por su parte,

no puede decirse que, hasta la aparición de la informática, los matemáticos se hayan preocupado mucho de cosas tales como la complejidad o el costo de sus operaciones, cuestiones de vital importancia para los informáticos.

Vayamos un poco más allá y refirámonos no sólo a los métodos de una y otra ciencia, sino a sus contenidos, en busca de semejanzas, pero también de características diferenciadoras. También en este aspecto, matemáticas e informática se hallan estrechamente interrelacionadas.

Comencemos por analizar la influencia de las matemáticas en la informática. Esta influencia empieza, claro está, en el hecho mismo del nacimiento de la informática, que principalmente surge a partir de las matemáticas, aunque influenciada considerablemente por la ingeniería eléctrica o electrónica. Las matemáticas juegan un papel esencial en todas las áreas de la informática que se han desarrollado desde su estado inicial de técnica al de lo que hoy puede considerarse ya como una ciencia. Casi cada una de las ramas de las matemáticas ha tenido su influencia en el desarrollo de uno u otro aspecto de la informática. A modo de ejemplo, considérense el análisis de algoritmos, que requiere el uso de la inducción matemática, la probabilidad discreta, el manejo de series numéricas y ciertas dosis de combinatoria básica; o la verificación de algoritmos, que usa de la lógica proposicional; por no hablar de temas tan básicos y consustanciales a la informática como es el de los sistemas de numeración, particularmente el binario, y de los algoritmos para efectuar las operaciones aritméticas básicas.

Recíprocamente, el desarrollo de la informática ha ido afectando a las matemáticas de diversas maneras. La más obvia proviene de las posibilidades de cálculo de los ordenadores, que ha sido explotada en la investigación matemática allí donde los cálculos manuales eran demasiado costosos, tanto para confirmar como para demoler conjeturas. Por otra parte, en todas las ramas de las matemáticas se aprecia hoy un énfasis en las demostraciones por construcción: pruebas de existencia son substituidas por algoritmos que construyen objetos matemáticos, dando a las teorías nuevos e interesantes impulsos.

Lo más llamativo, sin embargo, es el hecho de que el estudio mismo de los algoritmos ha abierto nuevos frentes, cargados de problemas abiertos, en las matemáticas. La explosión de las investigaciones en el amplia área que se ha dado en denominar *matemática discreta* es una buena prueba de ello. Así lo expresa Knuth [15]: “*it provides a breath of life for many areas of interesting new mathematics which had been suffering from a lack of new ideas*”. Es esta una opinión en la que coincide también Rosen [18]: “[...] *the growth of computers and computer science will surely not end until computers are ubiquitous in all branches of science and technology and, more generally, in society broadly. One certain result of this is that computer*

*science will become the largest, perhaps by far the largest, source of problems for mathematics and mathematicians”.*

### **3. La informática en la enseñanza de las matemáticas**

De todo lo anterior se desprende que la influencia de la informática en las matemáticas, en el quehacer cotidiano de los investigadores y de todos cuantos trabajan con ellas, es enorme. En particular, la docencia no puede quedar al margen de este proceso de mutua realimentación, como de hecho no está quedando. La revolución informática tiene una doble influencia en la docencia de las matemáticas: por un lado, está afectando a los contenidos mismos de las materias impartidas; por otro, está permitiendo muchos progresos en la metodología usada al enseñarlas.

Por lo que se refiere a los contenidos, claro está que éstos dependen de los estudiantes a los que se dirigen las enseñanzas. No deben estudiar los mismos contenidos de matemáticas los estudiantes de física que los de magisterio, los de económicas que los de ingeniería industrial. Para decidir qué contenidos se impartirán a unos u otros, debe uno plantearse cuáles son los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en cada contexto. Existe un consenso generalizado sobre el doble carácter de las enseñanzas de matemáticas: deben inducir en los estudiantes un hábito de razonamiento riguroso, a la vez que darles habilidad en el manejo de las herramientas matemáticas necesarias en su profesión. Dicho de otro modo, las asignaturas de matemáticas deben cubrir el doble objetivo de dar al estudiante cierta madurez matemática a la vez que familiaridad con las instrumentos matemáticos apropiados.

En este sentido, los programas se están modificando en los últimos tiempos en una dirección que da más importancia a las aplicaciones en general, y a aquellas relacionadas con la informática en particular. Tres son los motivos para ello. En primer lugar, la enseñanza de las matemáticas está reflejando sensiblemente el interés creciente de los investigadores por los temas a que nos referíamos anteriormente, derivados de la influencia de la informática: a la vez que la comunidad produce cada vez más trabajos en el área de la matemática discreta, aparecen asignaturas de matemática discreta en muchas de las carreras universitarias. En segundo lugar, la enseñanza de las matemáticas está siendo sensible a los cambios que se han ido produciendo, y aún se producen, en el mercado de trabajo, esto es, en las necesidades profesionales de los futuros titulados: al lado de profesiones ya consolidadas, ha habido una explosión de nuevos oficios que requieren una mayor capacidad de comprensión de los fenómenos relacionados con los ordenadores, unos mayores conocimientos de lo que genéricamente llamamos matemática apli-



cada. Finalmente, los estudiantes que en el futuro se dediquen a la enseñanza también necesitan una formación que combine los aspectos teóricos con los más aplicados, bastante más, si cabe, de lo que se necesitaba hace tan sólo una veintena de años.

Por lo que se refiere a la metodología, la generalización de los ordenadores personales está significando un gran cambio a todos los niveles: desde la enseñanza primaria hasta la universitaria, por no hablar aquí de la autoenseñanza, la enseñanza continuada y otras muchas facetas novedosas que vienen de la mano de las aplicaciones multimedia. En los últimos años, se han generalizado las actividades de laboratorio en las asignaturas de matemáticas en la universidad. La aparición de los manipuladores simbólicos ha permitido complementar las tradicionales clases de teoría y de problemas con un nuevo tipo de actividad, ya sea en clase, de forma conducida, ya sea como trabajo personal del alumno, o una combinación de ambas cosas. Se trata de una forma de aprendizaje por la vía de la experimentación, la confirmación de lo que se ha aprendido en clase, la ejemplificación y, en los niveles más avanzados, la programación de las soluciones estudiadas teóricamente. El estudiante tiene ante sí una herramienta que le permite, a la vez, entender mejor aquello que aprende y ponerlo en práctica, es decir, que le facilita el aprendizaje a la vez que le expone de forma tutorizada a lo que en el futuro acabará siendo su práctica: el problema de aplicar los conocimientos teóricos que tiene.

Pero no se trata sólo de aprovechar las ventajas que los ordenadores ponen a nuestro alcance. La influencia de la informática en las matemáticas ha hecho mucho más que eso: progresivamente, la enseñanza de las matemáticas está reflejando el interés creciente de las soluciones algorítmicas a los problemas. Cada vez es más frecuente ver cómo muchos temas tradicionales se enseñan desde un punto de vista más y más algorítmico. De hecho, es esta una tendencia que, además, facilita la comprensión por parte de los alumnos. Citando a Knuth [15], *“It has often been said that a person does not really understand something until he teaches it to someone else. Actually a person does not really understand something until he can teach a computer, i.e., express it as an algorithm”*.

Esta filosofía enfatizadora de los aspectos aplicados y computacionales de las matemáticas es la que subyace, a mi entender, en el proyecto, hoy ya realidad, de la Facultad de Matemáticas y Estadística de la Universidad Politécnica de Catalunya. Es por ello el momento de hacer un alto y referirnos a ella.

## 4. La Facultad de Matemáticas y Estadística

La Facultad de Matemáticas y Estadística de la Universidad Politécnica de Catalunya inició su andadura el curso 1992-93. Ese año se impartió por primera vez el primer curso de la Licenciatura de Matemáticas, a la vez que se incorporaron a la Facultad los estudios de la Diplomatura de Estadística que, desde sus inicios el curso 1990-91, se habían impartido en la Facultad de Informática.

La Facultad nació con la inequívoca voluntad de ser coherente con el entorno tecnológico de la Universidad en que se inserta. Por lo que se refiere a la Diplomatura de Estadística, además, los orígenes de ésta en la Facultad de Informática no hacían más que facilitar las cosas. En la Guía Docente de estos estudios, puede leerse: *“Uno de los campos en los cuales la tecnología ha mostrado más adelantos en los últimos años ha sido, indudablemente, el tratamiento de la información. El progreso de las nuevas tecnologías y su aplicación al mundo económico, empresarial, científico y técnico ha conllevado la necesidad de incorporar al mercado laboral perfiles específicos que puedan satisfacer la demanda generada.”* Más adelante, la Guía Docente es incluso más explícita: *“El plan de estudios de la diplomatura de Estadística pretende dar, aparte de los lógicos fundamentos estadísticos y matemáticos, una sólida formación informática, que permita a los futuros profesionales desenvolverse cómodamente en entornos cada vez más automatizados.”*

Si las palabras son concluyentes, más aún lo son los hechos: el plan de estudios de la Diplomatura de Estadística, estructurado en tres cursos de dos cuatrimestres cada uno, consta de dos años obligatorios y un tercero totalmente optativo (que incluye el proyecto final de carrera). Durante los dos primeros años, el estudiante cursa, claro está, las asignaturas troncales (comunes a todas las titulaciones análogas en España), pero una breve ojeada a las asignaturas obligatorias (propias de la Universidad) no deja lugar a dudas sobre la orientación de la carrera: de las seis materias obligatorias no troncales, tres son de informática (Software Estadístico, Programación y Complementos de Programación y Bases de Datos), dos son de economía (Macroeconomía y Microeconomía y Comercio Internacional) y una está relacionada con la ingeniería (Fundamentos de Control de Calidad). Para más detalles, puede consultarse la Tabla 4.

En cuanto a las asignaturas optativas, éstas están agrupadas en bloques, y tanto la simple lectura de los títulos de éstos, como el análisis más detallado de las asignaturas que engloban, confirman la orientación aplicada de la titulación:

- *Bloque común:* Análisis Multivariante de Datos, Estructuras Organiza-

**1<sup>er</sup> año – 1<sup>er</sup> cuatrimestre**

|                       |                           |           |                            |               |
|-----------------------|---------------------------|-----------|----------------------------|---------------|
| Análisis Matemático 1 | Cálculo de Probabilidades | Álgebra 1 | Fundamentos de Informática | Macroeconomía |
|-----------------------|---------------------------|-----------|----------------------------|---------------|

**1<sup>er</sup> año – 2<sup>o</sup> cuatrimestre**

|                   |                    |           |                      |              |  |
|-------------------|--------------------|-----------|----------------------|--------------|--|
| Análisis Matem. 2 | Estadística Básica | Álgebra 2 | Software Estadístico | Programación | Microeconomía y Comercio Internacional |
|-------------------|--------------------|-----------|----------------------|--------------|--|

**2<sup>o</sup> año – 1<sup>er</sup> cuatrimestre**

|                   |                      |                                   |  |   |
|-------------------|----------------------|-----------------------------------|--|---|
| Análisis Matem. 3 | Estadística Matem. 1 | Fundamentos de Control de Calidad | Muestreo Estadíst. y Recogida de Datos 1 | Complementos de Programación y Bases de Datos |
|-------------------|----------------------|-----------------------------------|--|---|

**2<sup>o</sup> año – 2<sup>o</sup> cuatrimestre**

|                                      |                          |  |                  |                                     |
|--------------------------------------|--------------------------|--|------------------|-------------------------------------|
| Investigación Operativa Determinista | Estadística Matemática 2 | Muestreo Estadíst. y Recogida de Datos 2 | Modelos Lineales | Investigación Operativa Estocástica |
|--------------------------------------|--------------------------|--|------------------|-------------------------------------|

**3<sup>er</sup> año – 1<sup>er</sup> cuatrimestre**

|  |
|--|
| Optativas (20 créditos) + Libre elección (13 créditos) |
|--|

**3<sup>er</sup> año – 2<sup>o</sup> cuatrimestre**

|   |
|---|
| Optativas (13 créditos) + Libre elección (8 créditos) + Proyecto fin de carrera (15 créditos) |
|---|

Cuadro 4: El plan de estudios de la Diplomatura de Estadística.

tivas, Previsión y Series Temporales.

- *Bloque de Control de Calidad:* Control Estadístico de Procesos, Diseños Combinatorios, Ingeniería de la Calidad, Teoría de la Calidad Total.
- *Bloque de Bioestadística:* Diseños Combinatorios, Bioestadística, Modelos Lineales Generalizados.
- *Bloque de Empresas y Administración:* Complementos de Macroeconomía, Estadística en la Administración Pública, Estadística de Poblaciones, Investigación Comercial.
- *Bloque de Investigación Operativa:* Aplicaciones de la Programación Lineal, Aplicaciones de la Programación No Lineal, Simulación.

- *Bloque de complementos:* Computación Estadística, Métodos Numéricos Aplicados a la Estadística, Modelos Causales, Sistemas Orientados a Bases de Datos.

Además, los créditos de todas las asignaturas, no importa si son troncales, obligatorias u optativas, son de dos tipos: teóricos y prácticos. Estos últimos no sólo incluyen las tradicionales clases de problemas, sino también actividades llevadas a cabo en clases de prácticas, en el laboratorio de cálculo. De esta forma, el contacto de los estudiantes con la informática es completa.

Con un espíritu semejante nació, en 1992, la Licenciatura de Matemáticas. Esto es lo que dice la Guía Docente: *“La matemática siempre ha sido una ciencia, pero hasta hace bien poco no era una profesión. En todo caso, había una única profesión, la de profesor de matemáticas, que era ejercida mayoritariamente por matemáticos. Hoy en día todos los estudios de ciencias han sufrido transformaciones considerables, a causa de la importancia creciente de la ciencia en los procesos altamente tecnificados de producción y servicios. Por ello, los estudios de matemáticas también se ven afectados por estos cambios.*

*La licenciatura de Matemáticas que ofrece la UPC, sin perder el carácter básico de reflexión conceptual que caracteriza las carreras de ciencias, pone el acento en los temas más cercanos a las aplicaciones y en la estrecha vinculación a los objetivos y a las características de una universidad tecnológica.*

*La intención de la UPC es formar matemáticos con mentalidad aplicada, cercanos a los problemas que surgen en la tecnología, capaces de integrarse en equipos interdisciplinarios de investigación en temas de ingeniería o de incorporarse profesionalmente a empresas, industrias, administraciones públicas o departamentos universitarios con necesidades en este campo”.*

Veamos en la Tabla 5 cómo se concreta esta vocación aplicada: la carrera, que tiene estructura cuatrimestral, consta de cinco cursos, de dos cuatrimestres cada uno, en los que, una vez más, se observa la importancia de las asignaturas obligatorias relacionadas con la informática. Informática 1 y 2, o Computación Algebraica, por ejemplo, son buena muestra de ello.

Más evidente todavía resulta la orientación aplicada y la influencia computacional de la carrera al analizar las asignaturas optativas que se ofrecen, también en este caso, agrupadas por bloques:

- *Bloque de Álgebra Aplicada:* Álgebra Computacional, Criptografía, Teoría de Códigos, Teoría de Números, etc.
- *Bloque de Estadística:* Análisis de Series Temporales y Previsión, Estadística Multidimensional, Inferencia Estadística y Análisis Bayesiano, Modelo Lineal General, etc.

| Primer curso  |           |                        |                |
|---------------|-----------|------------------------|----------------|
| Informática 1 | Cálculo 1 | Álgebra Lineal         | Libre Elección |
| Informática 2 | Cálculo 2 | Computación Algebraica | Física General |

| Segundo curso           |               |           |                            |
|-------------------------|---------------|-----------|----------------------------|
| Métodos Numéricos 1     | Cálculo 3     | Geometría | Probabilidad y Estadística |
| Investigación Operativa | Análisis Real | Topología | Inferencia Estadística     |

| Tercer curso        |                            |                         |                                  |
|---------------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| Métodos Numéricos 2 | Ecuaciones Diferenciales 1 | Geometría Diferencial 1 | Libre Elección                   |
| Métodos Numéricos 3 | Ecuaciones Diferenciales 2 | Geometría Diferencial 2 | Modelos matemáticos de la Física |

| Cuarto curso |                    |                      |            |
|--------------|--------------------|----------------------|------------|
| Optativa 1   | Análisis Complejo  | Álgebra Abstracta    | Optativa 2 |
| Optativa 3   | Análisis Funcional | Topología Algebraica | Optativa 4 |

| Quinto curso |            |             |                |
|--------------|------------|-------------|----------------|
| Optativa 5   | Optativa 6 | Optativa 7  | Libre Elección |
| Optativa 8   | Optativa 9 | Optativa 10 | Libre Elección |

Cuadro 5: El plan de estudios de la Licenciatura de Matemáticas.

- *Bloque de Informática Teórica:* Algorítmica, Calculabilidad, Teoría de la Computación, Teoría de la Programación, etc.
- *Bloque de Investigación Operativa:* Optimización Combinatoria, Optimización Continua 1, Optimización Continua 2, Programación Matemática, Simulación, etc.
- *Bloque de Matemática Discreta:* Aplicaciones de la Matemática Disc-

reta, Combinatoria, Geometría Discreta y Computacional, Teoría de Grafos, etc.

- *Bloque de Mecánica:* Astrodinámica y Mecánica Celeste, Mecánica de Fluidos, Mecánica de Medios Continuos, Mecánica Racional, etc.
- *Bloque de Métodos Numéricos:* Análisis Numérico, El Método de los Elementos Finitos, Métodos Integrales para Ecuaciones en Derivadas Parciales, Métodos Numéricos en ingeniería, Paralelización de Algoritmos, etc.
- *Bloque de Teoría de Sistemas:* Control de Sistemas en Ingeniería, Métodos Geométricos en Teoría de Sistemas, Teoría de Sistemas Lineales, Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, etc.
- *Bloque de Ampliaciones y Complementos:* Ampliación de Análisis, Ampliación de Geometría, Ampliación de Modelos Matemáticos de la Física, Didáctica de la Matemática, Lógica y Fundamentación, etc.

Además, la Facultad impulsa la posibilidad de obtener créditos de libre elección en el segundo ciclo de la licenciatura de Matemáticas a través de lo que llama *Proyecto Tecnológico*. Se trata de un trabajo de las características de un proyecto profesional en un tema tecnológico relevante, para el cual se necesite alguna componente matemática importante, al estilo de lo que en las escuelas de ingeniería son los proyectos de fin de carrera.

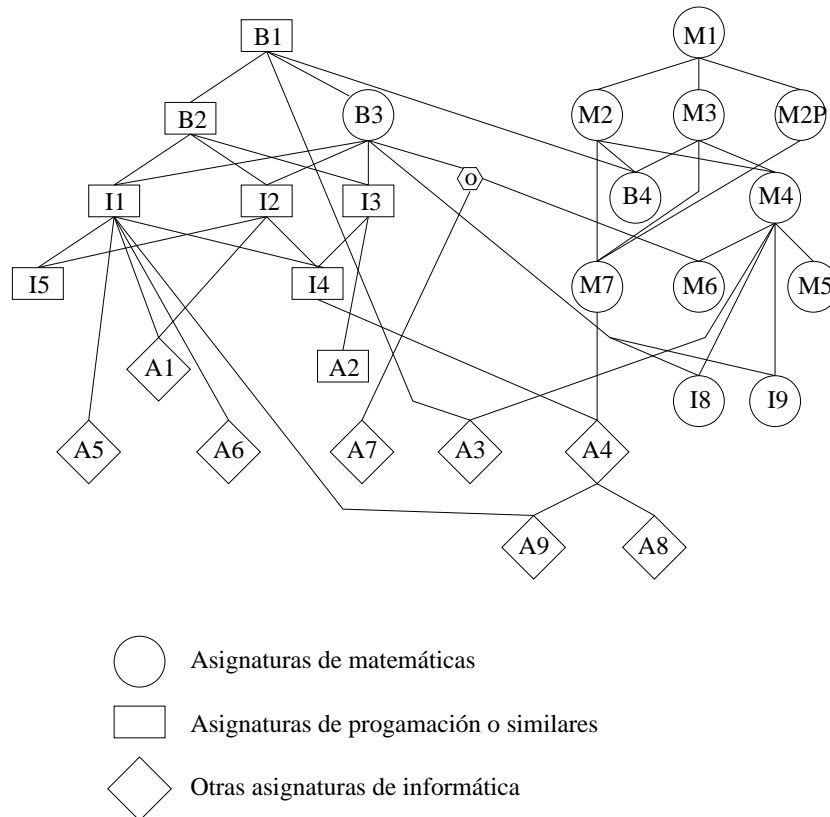
Podrían decirse muchas cosas más sobre la docencia en la Facultad de Matemáticas y Estadística. Sin embargo, nos centraremos en la discusión sobre la interrelación entre matemáticas e informática y sus consecuencias en la docencia de las matemáticas en el ámbito informático.

## 5. Las matemáticas en la enseñanza de la informática

La informática es una ciencia muy joven. No es de extrañar, por tanto, que a lo largo de su proceso de consolidación como ciencia se haya producido un gran debate, que aún no puede darse por cerrado, sobre sus contenidos, sus métodos y, en general, todo cuanto permite definirla como ciencia y determinar su núcleo principal. La enseñanza de la informática no podía quedar al margen de una discusión de tal calibre. A lo largo de los últimos treinta años, la comunidad científica de matemático-informáticos ha estado debatiendo con pasión la cuestión de qué debe enseñarse en las facultades de

informática y cómo. A lo largo de la discusión, la opinión mayoritaria ha ido modificándose, paralelamente a la evolución de la informática misma, según ésta se iba formando como ciencia independiente.

El primer gran documento al respecto se publicó en 1968. Se trata de un informe propiciado por la ACM y conocido como *Curriculum '68* [1].



Cuadro 6: Estructura de *Curriculum '68*.

En él se proponía un plan de estudios estandarizado para las facultades de informática. Las características principales del curriculum propuesto eran las siguientes:

- En términos generales, la propuesta era muy clásica, en el sentido de que se inspiraba fundamentalmente en los planes de estudio de las ingenierías o las carreras de ciencias.
- Por lo que se refiere a las asignaturas de matemáticas, esto significa que no presentaban grandes especificidades ni diferencias respecto de las que se requerían para cursar otros estudios científico-técnicos. Téngase

en cuenta que en los Estados Unidos los cursos se ofrecen de forma unificada desde los departamentos. Esto significa que un estudiante que deba cursar una asignatura básica de cálculo, por ejemplo, en general cursará la misma asignatura, provenga de los estudios que provenga.

- El peso de las matemáticas en el plan de estudios era importante, comparable al de cualquier otra ingeniería clásica. Concretamente, las asignaturas obligatorias previstas de matemáticas eran 8, de las cuales 6 eran fijas y 2 a escoger de entre cuatro posibilidades, tal como se recoge en la Tabla 7.

|                       |  |
|-----------------------|--|
| M1                    | Cálculo introductorio                    |
| M2                    | Análisis matemático I                    |
| M2P                   | Probabilidad                             |
| M3                    | Álgebra lineal                           |
| B3                    | Introducción a las estructuras discretas |
| B4                    | Cálculo numérico                         |
| <i>más 2 de entre</i> |  |
| M4                    | Análisis matemático II                   |
| M5                    | Cálculo multivariante avanzado           |
| M6                    | Estructuras algebraicas                  |
| M7                    | Probabilidad y estadística               |

Cuadro 7: Asignaturas de Matemáticas en *Curriculum '68*.

- Las asignaturas de matemáticas se presentaban como intrincadamente relacionadas con las asignaturas de carácter más específicamente informático, en una estructura de prerequisites bastante complicada (véase la Tabla 6).

Diez años más tarde, la misma ACM impulsó una revisión de su propuesta anterior. Para entonces, la informática había evolucionado en el sentido de que ya no era para ella tan importante el manejo de entidades numéricas como lo fue en su origen, sino que ahora el énfasis se ponía en la manipulación de grandes cantidades de información alfanumérica. Los informáticos estaban haciendo un gran esfuerzo por consolidar su disciplina como una ciencia separada de las matemáticas, y las primeras promociones de informáticos



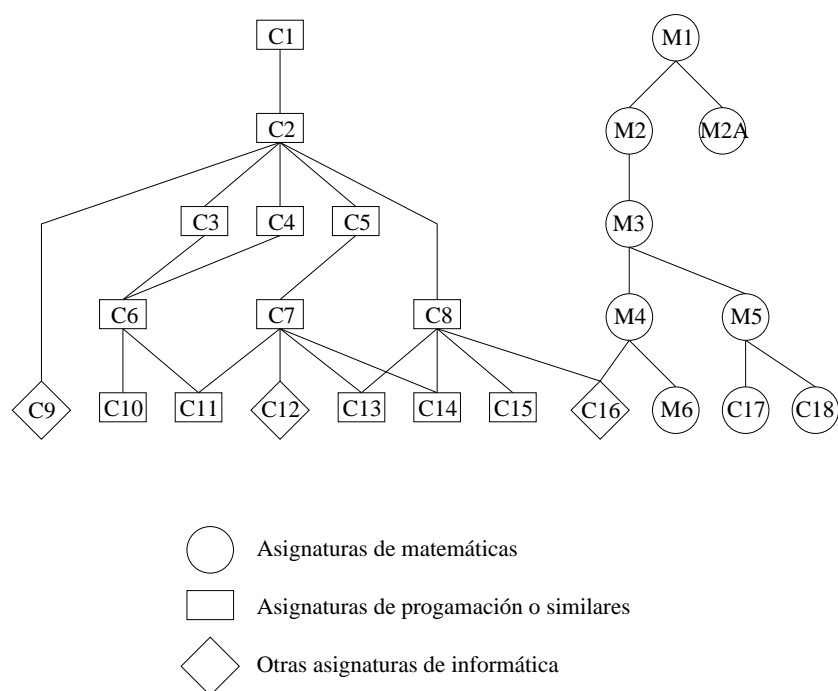
habían llegado ya a los departamentos de informática de las universidades. Como resultado de todo ello, la nueva propuesta, que se conoció como *Curriculum '78* [3], significó un brusco viraje respecto de *Curriculum '68*. Sus características principales fueron las siguientes:

- La nueva propuesta partía de una concepción de la informática muy orientada a la programación. Posteriormente, esta identificación informática = programación ha sido apliamente criticada por los mismos informáticos.
- Como consecuencia, el papel de las matemáticas en el plan de estudios disminuía drásticamente. De las 8 asignaturas obligatorias de *Curriculum '68*, se pasaba ahora a 5 tan sólo (véase la Tabla 8).

|     |                       |
|-----|-----------------------|
| M1  | Cálculo Introdutorio  |
| M2  | Análisis Matemático I |
| M2A | Probabilidad          |
| M3  | Álgebra Lineal        |
| M4  | Estructuras Discretas |

Cuadro 8: Asignaturas de Matemáticas en *Curriculum '78*.

- Como “compensación” la propuesta dejaba la puerta abierta a la posibilidad de que algunos estudiantes pudieran escoger alguna asignatura optativa de matemáticas (M5 y M6, respectivamente Análisis Matemático II y Probabilidad y Estadística), aunque estas optativas quedaban totalmente desligadas del resto de asignaturas de la carrera.
- Además, las asignaturas de matemáticas perdían sus relaciones de prerrequisito con las asignaturas más específicamente informáticas, apareciendo como un bloque aislado dentro del plan de estudios, con la única excepción de M4 (Estructuras Discretas), prerrequisito de C16 (Autómatas, Computabilidad y Lenguajes Formales). Para más detalles, véase la Tabla 9, y compárese con la Tabla 6.
- Por último, hay que destacar que las asignaturas de matemáticas propuestas en *Curriculum '78* seguían caracterizándose por su falta de especificidad. Aparentemente, los redactores de la propuesta creían que las matemáticas adecuadas para una carrera de informática eran del mismo tipo (aunque en menor cantidad) que para cualquier otra ingeniería o carrera de ciencias.



Cuadro 9: Estructura de *Curriculum* '78.

Como puede imaginarse, la publicación de *Curriculum* '78 provocó la reacción inmediata no sólo de la comunidad matemática, sino de parte de la misma comunidad informática, que veía peligrar la consolidación de su área de trabajo como ciencia, y su definitiva relegación a la categoría de técnica, su identificación con la simple programación. De hecho, el mismo grupo de trabajo de la ACM que elaboró *Curriculum* '78 había presentado un primer borrador a debate en 1977, y se vio obligado a introducir modificaciones en la versión final a causa de las controversias surgidas. El primer documento afirmaba que “*It was recognized in the process of specifying this core material that no mathematical background beyond the ability to perform simple algebraic manipulation is a prerequisite to an understanding of the topics*” [2]. Por supuesto, esta frase desapareció en la versión final, pero las modificaciones no fueron, ni de lejos, suficientes.

En una primera reacción de emergencia, Ralston y Show publicaron un artículo [20] cuyo título es suficientemente explícito: *Curriculum* '78 – *Is Computer Science Really that Unmathematical?*. Son sólo cuatro páginas, pero constituyen un verdadero grito de angustia: “*The principles and theories of any science give it structure and make it systematic. They should set the shape of the curriculum for that science, for*

- *only in that way they provide a framework for the mastery of facts,*
- *and only in that way they become the tools of the practicing scientist.*

*This is as true for computer science as it is for mathematics, for the physical sciences, and for any engineering curriculum. Inevitably, for any science or any engineering discipline, the fundamental principles and theories can only be understood through the medium of mathematics. [...] One matter of crucial importance makes an emphasis on principles and theory even more important in computer science than in any other discipline. Computer science is an evolving field. Specific skills learned today will rapidly become obsolete. The principles that underlie these skills, however, will continue to be relevant. Only by giving the student a firm grounding in these principles can he or she be protected from galloping obsolescence. Even a student who aspires only to be a programmer needs more than just programming skills”.*

Ya con más calma, el mismo Ralston publicó un artículo mucho más largo [18] en que comparaba las propuestas de *Curriculum '68* y *Curriculum '78*, analizaba las razones que habían llevado a la propuesta de *Curriculum '78*, y documentaba con detalle los motivos que justificaban su oposición a éste. En esta última dirección, destacamos, por su contundencia, el párrafo siguiente: “*But perhaps the strongest case for a strong mathematical component in undergraduate computer science can be made by noting that, even if the false view that Computer Science = Programming were true, the case for more mathematics in computer science would be overwhelming. The single biggest challenge faced in the overall area of programming is how to provide it with some theoretical (i.e., mathematical) underpinning that will enable software to be developed and maintained more efficiently and with a higher level of reliability than is normally attained nowadays. Many of the most important research areas in computer science, such as the work in program verification and structured programming, are concerned with these problems. And all of this is highly mathematical. Moreover, the need to teach computer science students how to analyze and verify algorithms is becoming increasingly clear. And this, too, requires intensive mathematical analysis. Finally, at the risk of noting the obvious, two purposes of all mathematics education are to instill in students the meaning of rigorous thinking and an appreciation of abstraction. The importance of both of these to programming – and to computer science more generally – can hardly be overstressed”.*

Sin embargo, lo más importante en las reacciones posteriores a la publicación de *Curriculum '78* son las propuestas concretas de contenidos para las asignaturas de matemáticas en los planes de estudio de informática. En su primer artículo, Ralston y Show [20] hacen una somera descripción de

las matemáticas que consideran necesarias en un plan de estudios de informática. Esquemáticamente, proponen que se enseñe matemática discreta (lógica elemental, el principio de inducción, aritmética finita, combinatoria básica, ecuaciones en diferencias, probabilidad discreta, teoría de grafos, algo de álgebra abstracta y álgebra lineal, etc.), cálculo y estadística. En su ya más largo artículo [18], Ralston justifica su elección de los temas de matemáticas que deben ser tratados del modo siguiente: “*To get some idea of the kind of mathematics needed to support the computer science courses listed above, let us list some topics which require mathematics and which are always, or often, covered in such courses:*

- *analysis of algorithms, including the use of induction, discrete probability, often the summation or manipulation of series, and various aspects of basic combinatorial theory;*
- *verification of algorithms, including the generation of logical assertions about algorithms and informal proofs of these;*
- *numbers and number systems, particularly the discrete number system which is the basis of all computer arithmetic;*
- *simple queueing theory used to discuss basic aspects of scheduling;*
- *random number generation, since random number generators are often used in problems given in basic computer science courses.”*

La polémica sigue, y en medio de ella, en 1983, el IEEE publica una revisión [12] de su primera propuesta de currículum [13], que databa de 1977. En este documento de revisión, se declara: “*The field of computer science and engineering draws heavily on mathematics and the science. [...] A recent thrust of discrete mathematics is toward developing theoretical tools suitable for describing algorithmic applications. The material can be broken into two sections, one based on the concepts of modern algebra as applied to sequential machines and computer system design, the other based on graphs and trees as applied to data structures and algorithms. [...] Set theory and propositional logic provide a common context. From a pedagogical standpoint, the theoretical material is motivated by coupling it closely with realistic applications to problems of computer science and engineering.*” Su propuesta incluye bajo el título de matemática discreta los temas que se recogen en la Tabla 10, y cada uno de ellos se presenta con un componente teórico y una parte de aplicaciones.

Sin embargo, la propuesta del IEEE pecaba de cierta incoherencia: si, por una lado, como hemos visto, declaraba la importancia de las matemáticas y,

---

|   |                                    |
|---|------------------------------------|
| 1 | Introducción a la lógica simbólica |
| 2 | Teoría de conjuntos                |
| 3 | Estructuras algebraicas            |
| 4 | Grupos y semigrupos                |
| 5 | Grafos                             |
| 6 | Retículos y álgebra de Boole       |
| 7 | Cuerpos finitos                    |
| 8 | Computabilidad                     |

---

Cuadro 10: Los contenidos necesarios de matemática discreta, según el informe del IEEE.

en particular, de la matemática discreta en la enseñanza de la informática, por otro su propuesta concreta de plan de estudios dispersaba estos contenidos entre las diversas asignaturas del plan de estudios reduciendo, de este modo, su relevancia, mientras mantenía en el plan de estudios la presencia de las asignaturas más clásicas de cálculo, ecuaciones diferenciales, etc.

Casi inmediatamente en el tiempo, en 1984 se produce la primera reacción positiva por parte de la ACM. En primer lugar, ésta ha impulsado, conjuntamente con el IEEE, un estudio de la situación. El informe preliminar empieza contundentemente [8]: “*Members of the IEEE Computer Society and the ACM frequently encounter new computer science graduates inadequately prepared to handle the professional responsibilities implied by their degree*”. A pesar de su formulación, aún muy genérica, el informe aboga por un aumento de la presencia de las matemáticas en las carreras de informática, matemáticas que, especifica, deberían incluir matemática discreta, cálculo diferencial e integral, probabilidad y estadística y, por lo menos, una de las siguientes áreas: álgebra lineal, análisis numérico, álgebra moderna o ecuaciones diferenciales. El otro hecho relevante que tiene lugar en 1984 es la publicación, por parte de la ACM, del resultado de la revisión de los contenidos de la primera de las dos asignaturas básicas de informática de *Curriculum '78* [4] (que pronto sería seguido por el informe de revisión de la segunda asignatura [5]). El informe afirma “*We are in agreement with many other computer scientists that a strong mathematics foundation is an essential component of the computer science curriculum and that discrete mathematics is the appropriate first mathematics course for computer science majors*”. Y para demostrarlo, el editor de la revista decide publicar, a continuación misma del informe, un nuevo artículo de Ralston, titulado “*The*

*first course in computer science needs a mathematics corequisite*" [19], en el que se presenta un estudio pormenorizado de los conocimientos matemáticos necesarios para seguir correctamente el curso básico de informática objeto de revisión. Véase un resumen en la Tabla 11.

---

### Matemáticas elementales

|   |   |
|---|---|
| Sumatorios y productos  | Útiles en muchas aplicaciones, especialmente en el análisis de algoritmos elementales.                        |
| Subíndices  | Útiles en los sumatorios, así como en las matrices.   |
| Funciones específicas sencillas, especialmente el valor absoluto, la parte entera y las funciones trigonométricas | Útiles en muchas aplicaciones, especialmente en relación con las funciones intrínsecas de cualquier lenguaje. |
| Logaritmos  | En el análisis de muchos algoritmos (de ordenación, por ej.) y en el estudio de los órdenes de magnitud.      |
| Números primos  | Un algoritmo estándar.  |
| Máximo común divisor  | El algoritmo de Euclides es otra de las aplicaciones estándar.  |
| Funciones parte entera por arriba y por abajo   | Aparecen por todas partes en informática.   |

---

### Ideas matemáticas generales

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| Funciones                             | En la idea de función como un tipo de subprograma; más en general, como correspondencia o aplicación en el análisis de algoritmos.  |
| Conjuntos (y operaciones entre éstos) | En la idea de tipo de datos <i>conjunto</i> , así como en muchos razonamientos que tienen que ver con los algoritmos y su análisis. |

---

## Álgebra

|                   |  |
|-------------------|--|
| Álgebra matricial | En muchas aplicaciones de las matrices, por ej. en el cálculo de la matriz de caminos de un grafo.   |
| Notación polaca   | En cualquier estudio de la compilación de expresiones aritméticas, así como en razonamientos más generales que involucran las notaciones de tipo prefijo, postfijo e infijo. |
| Congruencias      | En el estudio elemental de la generación de números aleatorios; como notación, también es útil en temas relacionados con el máximo común divisor.                            |

---

## Sumas y límites

|                              |  |
|------------------------------|--|
| Cálculo de sumas elementales | La suma de los $n$ primeros números naturales aparece en muchos contextos.                               |
| Notación de orden            | Esencialmente, cualquier análisis de algoritmos requiere el uso y comprensión de la notación $O(f(n))$ . |
| Números armónicos            | En diversas áreas, por ej. en el análisis del algoritmo de <i>Quicksort</i> .                            |

---

## Números y sistemas de numeración

|                     |  |
|---------------------|--|
| Notación posicional | Obviamente, este es un tema que corresponde a la escuela superior (cuando no a la elemental), pero muchos estudiantes universitarios no lo entienden realmente, cuando cualquier razonamiento sobre la aritmética del ordenador requiere su comprensión. |
|---------------------|--|

Bases no decimales y conversión    La base binaria y otras bases son esenciales en informática; los algoritmos de conversión entre bases pueden ayudar a los estudiantes a su comprensión.

---

### **Lógica y álgebra de Boole**

Operadores y expresiones booleanas    El uso obvio es el de las expresiones Booleanas en los lenguajes de programación, pero es también útil en el diseño lógico elemental.

Lógica matemática elemental    Útil en gran variedad de contextos y necesaria en la verificación de algoritmos.

---

### **Probabilidades**

Conceptos básicos de espacios muestrales y leyes de la probabilidad    Casi cualquier análisis de algoritmos parte de la asunción de equiprobabilidad de los conjuntos de datos.

---

### **Combinatoria**

Permutaciones, combinaciones y enumeración    Necesarios en el análisis de la mayoría de algoritmos y, especialmente, en muchos de los más importantes (por ej., en el problema del viajante de comercio).

Coefficientes binomiales y su teorema    Muy común en el análisis matemático discreto.

---

### **Teoría de grafos**

Conceptos básicos    Útiles al usar los grafos como estructuras de datos y, más específicamente, en los problemas de redes.



|         |   |
|---------|---|
| Árboles | El conocimiento de las propiedades de los árboles como objetos matemáticos permite la comprensión de sus aplicaciones informáticas. |
|---------|---|

---

**Ecuaciones en diferencias y recurrencias**

|   |  |
|---|--|
| Solución de ecuaciones simples en diferencias | Útil en problemas tales como el de las torres de Hanoi o el <i>Quicksort</i> . |
| Funciones generatrices                        | Una herramienta necesaria en el análisis de algoritmos.                        |

---

Cuadro 11: Las matemáticas necesarias para apoyar el primer curso de informática.

En realidad, los contenidos de matemáticas propuestos por Ralston no difieren demasiado de los que el mismo Knuth implícitamente declara necesarios, al incluirlos en el capítulo dedicado a los conceptos básicos del primer volumen de su conocida obra *The art of computer programming* [14], recogidos en la Tabla 12.

- 
- 1 Inducción matemática
  - 2 Números, potencias y logaritmos
  - 3 Sumas y productos
  - 4 Funciones enteras y teoría de números elemental
  - 5 Permutaciones y factoriales
  - 6 Coeficientes binomiales
  - 7 Números armónicos
  - 8 Números de Fibonacci
  - 9 Funciones generatrices
  - 10 Análisis de un algoritmo
  - 11 Representaciones asintóticas
- 

Cuadro 12: Las matemáticas necesarias, según Knuth.

Al mismo tiempo que se producía este inicio de reacción por parte de la ACM y el IEEE, aparecían otras propuestas curriculares que también pretendían corregir los errores de *Curriculum '78*. Es el caso, por ejemplo, de la propuesta de Gibbs y Tucker [11], que declaran: “*In short, the standard set by ‘Curriculum '78’ has become obsolete as a guiding light for maintaining contemporary high-quality undergraduate degree programs and cannot serve as a basis for developing a new degree program in computer science*”. Por lo que se refiere concretamente a las matemáticas, su propuesta incluye dos asignaturas, la primera de las cuales debería cubrir los temas siguientes:

**1. Contenidos necesarios:**

- introducción al razonamiento lógico, incluyendo temas tales como tablas de verdad y métodos de demostración; cuantificadores; pruebas por inducción; demostraciones sencillas de diagonalización;
- enumeración y teoría de probabilidades finitas sencilla;
- rudimentos de conjuntos, funciones y relaciones.

**2. Contenidos recomendados:**

- relaciones de recurrencia y ecuaciones en diferencias;
- teoría de grafos y árboles;
- matrices.

Por su parte, el segundo curso debería cubrir:

**1. Matemática discreta:**

- todos los temas recomendados y no cubiertos en la asignatura anterior;
- autómatas finitos y lenguajes;
- conjuntos parcialmente ordenados y retículos;
- teoría de códigos;
- aritmética modular y aritmética en otras bases;
- álgebra de Boole;
- estructuras algebraicas; semigrupos y grupos;

**2. Cálculo:**

- límites;

- manipulación de funciones;
- derivación;
- problemas max-min;
- integración sencilla;
- series infinitas;

### 3. Álgebra lineal:

- vectores y transformaciones lineales;
- bases;
- manipulación de matrices;
- valores y vectores propios.

Fruto de todas estas y muchas otras reacciones, la ACM y el IEEE deciden impulsar un proyecto conjunto: empezarán por establecer un consenso sobre la informática como disciplina, y sobre él construirán una nueva propuesta de curriculum. El primer informe ve la luz en 1989 [6], y ya hemos hecho referencia a él al analizar qué temas cubre la informática, en la Sección 1. Ya este informe describe con cierto detalle las necesidades matemáticas de las nueve áreas en que descompone la disciplina:

1. *Algoritmos y estructuras de datos*: teoría de grafos, funciones recursivas, relaciones de recurrencia, combinatoria, cálculo, inducción, lógica de predicados y lógica temporal, semántica, probabilidad, estadística, criptografía.
2. *Lenguajes de programación*: lógica de predicados, lógica temporal, álgebra moderna, inducción matemática.
3. *Arquitectura*: álgebra de Boole, estadística, probabilidad, teoría de colas, matemática discreta, teoría de números, aritmética en distintos sistemas numéricos.
4. *Computación numérica y simbólica*: teoría de números, álgebra lineal, análisis numérico, sistemas dinámicos no lineales, cálculo, análisis real, análisis complejo, álgebra.
5. *Sistemas operativos*: probabilidad, teoría de colas, teoría de la información y la codificación, lógica temporal, criptografía.
6. *Metodología e ingeniería del software*: cálculo de predicados, lógica temporal, semántica axiomática.

7. *Bases de datos y sistemas de información*: álgebra relacional y cálculo relacional, criptografía.
8. *Inteligencia artificial y robótica*: lógicas monótona, no monótona y difusa, teoría de grafos, gramáticas formales.
9. *Comunicación hombre-ordenador*: geometría en dos y más dimensiones: analítica, proyectiva, afín y computacional, análisis de Fourier, álgebra lineal, teoría de grafos, análisis.

Dos años más tarde, en 1991, aparece, finalmente, lo que ya se conoce con el nombre de *Curriculum '91* [7]. En su presentación, el informe declara sin lugar a dudas el viraje que propone: “*The report provides new perspectives on the importance and role of breadth in courses and the curriculum, the importance and role of laboratories in the curriculum, and the importance and role of social, ethical, and professional issues in the curriculum. It also reinforces the importance of theoretical foundations (including mathematics), the development and application of communication skills, and the inclusion of significant design experiences, including working in teams, in a program*”. La propuesta, en su conjunto, tiene un carácter mucho más metodológico que sus dos predecesores, *Curriculum '68* y *Curriculum '78*, en el sentido de que no propone una estructura concreta y rígida del plan de estudios, sino un marco y una metodología a partir de los cuales cada facultad puede introducir sus propias variaciones al diseñar su plan de estudios. El informe recoge una serie de contenidos que considera deben ser comunes a todos estos planes de estudios. Por lo que se refiere a las matemáticas, son los siguientes:

- **Matemática discreta:** conjuntos, funciones, lógica proposicional y de predicados elemental, álgebra de Boole, teoría de grafos elemental, matrices, técnicas de demostración (en particular, inducción y contradicción), combinatoria, probabilidad y números aleatorios.
- **Cálculo:** cálculo diferencial e integral, sucesiones y series, introducción a las ecuaciones diferenciales.

Buena parte de los temas de matemática discreta deberán cursarse pronto en la carrera, puesto que se necesitan en las asignaturas básicas más específicamente informáticas. Además, los estudiantes deberán estudiar al menos uno de los temas siguientes:

- **Probabilidades:** probabilidad discreta y continua, combinatoria y estadística elemental.

- **Álgebra lineal:** elemental, incluyendo matrices, vectores y transformaciones lineales.
- **Matemática discreta avanzada:** un segundo curso que cubra temas más avanzados de matemática discreta.
- **Lógica matemática:** cálculo proposicional y funcional, completitud, validez, demostrabilidad, decidibilidad.

En esta sección hemos procurado exponer cuál ha sido la evolución de las ideas generales de la comunidad de informáticos y matemáticos sobre los contenidos de matemáticas de los planes de estudio de informática. Tras este repaso del *qué*, no es posible cerrar la sección sin hacer una referencia, aunque sea breve, al *cómo*, esto es, a lo que ha sido dicho sobre cómo plantear las asignaturas. En este sentido, creo que tiene razón Ralston cuando afirma [19] que si defiende la necesidad de un curso de matemáticas como requisito del curso introductorio de informática es porque ambas asignaturas pueden interrelacionarse muy fuertemente: “*this is because a well-structured and well-taught discrete mathematics course will emphasize an algorithmic approach. This, in turn, means that students will benefit considerably from being able to implement their algorithms on a computer and will as a result be able to study them more intensively. This is a rare instance of two courses serving to reinforce each other*”. En resumen, el “pegamento” que debe unir los temas de una asignatura básica de matemáticas en una carrera de informática es la noción de algoritmo y el análisis de algoritmos. Los contenidos concretos de las asignaturas, con ser importantes, deben considerarse en términos de su adecuación a los objetivos que se pretenden. Cada plan de estudios no es más que uno de los posibles planes de estudio. La cuestión es asegurarse de que los temas elegidos son importantes, son comprensibles para los estudiantes del nivel correspondiente, tienden a desarrollar a la vez la madurez matemática de los estudiantes y su capacidad de cálculo, y sirven de apoyo a las asignaturas específicas de informática.

Finalmente, al elaborar el programa de las asignaturas, habrá que procurar alcanzar un equilibrio entre la faceta más instrumental y la faceta más formativa de las matemáticas, en el marco de una carrera técnica, y más aún en una carrera como la de informática, en permanente evolución. En estos últimos tiempos se ha tendido hacia un progresivo énfasis en las cuestiones más mecánicas, más calculísticas, en perjuicio de un enfoque más abstracto de las matemáticas. Resulta irónico que esto haya ocurrido mientras se generalizaba el uso de los manipuladores simbólicos. No es que los estudiantes no necesiten ya saber realizar ciertos cálculos (del mismo modo que la generalización de las calculadoras no significó la desaparición de la necesidad

de enseñar a los niños a efectuar operaciones aritméticas) pero el uso de los ordenadores requiere cierto sentido común. Es frecuente, especialmente entre los estudiantes de informática, que su fe ciega en los resultados que obtienen de las máquinas les haga creer en capacidad infinita de éstas para realizar cálculos, así como en su infalibilidad. No importa si el resultado es absurdo: si lo ha producido un ordenador, debe ser cierto. Las matemáticas deben ayudar a combatir esta idea, a inculcar un sentido analítico y crítico que perdure a lo largo de toda la vida profesional del estudiante.

A modo de conclusión, creo que esta es una declaración de principios que podría sin duda suscribir: *“All of us who teach computer science to college students pay lip service to the idea that we should educate those students and not just prepare them for high-paying jobs. We know that our discipline is changing so rapidly that little of what we teach today will be truly relevant even ten years from now. One way to act on this knowledge is to emphasize, as far as we are prescient enough to do so, the topics that will serve our students in the widest variety of possible futures. A sound grounding in mathematics is a time-honored way of providing the education that encourages professional growth, rather than the training that inhibits it. Introducing more mathematical-related topics into the first course in computer science not only will enhance the direct value of that course, it will give students education of lasting value”* [19].

## 6. La Facultad de Informática de Barcelona

La Facultad de Informática de Barcelona comenzó sus actividades el curso 1977-78, con la docencia de asignaturas de segundo y tercer ciclo de la Licenciatura en Informática, y el curso 1979-80 admitió ya estudiantes de primer ciclo. Casi diez años más tarde, en el curso 1988-89, se iniciaron, dentro de la Facultad, los estudios de la Diplomatura en Informática. A partir del curso 1991-92, y en el marco de la reforma de las enseñanzas universitarias, se pusieron en marcha las nuevas titulaciones de Ingeniería Informática, Ingeniería Técnica en Informática de Gestión e Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas, que paulatinamente sustituyeron a las anteriores. El cambio de unas titulaciones a otras no significó tan sólo un cambio de nombre, sino que conllevó un cambio de los planes de estudios y, con ellos, también un cambio del papel de las matemáticas en la formación de los futuros titulados. Para comprender la situación actual y, sobre todo, las perspectivas de futuro de las asignaturas que el Departamento de Matemática Aplicada II imparte en la Facultad, será bueno comenzar exponiendo los elementos principales que han caracterizado la evolución de los planes de estudio a lo largo de estos

años.

El antiguo plan de estudios y, dentro de él, el papel de las matemáticas, se caracterizaban, esencialmente, por los elementos siguientes:

- Los planes de estudios de la Licenciatura y de la Diplomatura eran disjuntos: la Diplomatura tenía sus propias asignaturas (aunque a veces sus nombres fueran los mismos que para la Licenciatura) y los estudiantes recibían sus clases de forma separada.
- El número de asignaturas obligatorias de ambas carreras era muy pequeño, y el plan de estudios, que se estructuraba como un complicado árbol de prerrequisitos, ofrecía una gran libertad de elección a los estudiantes.
- Sin embargo, el papel de las matemáticas era muy relevante. Además de las asignaturas de estadística (impartidas por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa) y de lógica (impartidas por el Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos), el plan de estudios contemplaba 3 asignaturas anuales obligatorias de matemáticas, más 3 optativas, intrincadamente relacionadas con el resto de asignaturas de la carrera a través de la estructura de prerrequisitos. En total, todos los estudiantes cursaban al menos 16 horas semanales (por 30 semanas) de matemáticas, el equivalente actual a 48 créditos, y esto sólo teniendo en cuenta las asignaturas obligatorias.
- En cuanto a los contenidos de las asignaturas obligatorias de matemáticas, puede decirse que eran bastante clásicos: Álgebra, Análisis I y Análisis II cubrían temarios más o menos tradicionales de álgebra lineal, aritmética, análisis real de una y varias variables, ecuaciones diferenciales, variable compleja y series de Fourier, mientras que las optativas que se ofrecían eran Cálculo Numérico, Análisis Numérico y Teoría de la Información y la Codificación.

En resumen, puede decirse que el viejo plan de estudios respondía a los principios de *Curriculum '68*, en que la carrera se planteaba como una carrera científico-tecnológica más, con énfasis en las matemáticas pero sin grandes especificidades. A lo sumo, era una carrera algo más “moderna”, pues permitía a los estudiantes decidir su propio camino a través de su gran optatividad.

Desgraciadamente, el nuevo plan de estudios, que empezó a implantarse ya en el curso 91-92, es un fiel reflejo de la ideas de *Curriculum '78*, a pesar de que para entonces la reacción contraria de la comunidad de matemáticos y de los mismos informáticos ya había sido aceptada por la ACM, y de que *Curriculum '91* estaba a punto de ser publicado. Los elementos esenciales del actual plan de estudios son los siguientes:

- Los planes de estudio de las Ingenierías Técnicas están totalmente integrados dentro del plan de estudios de la Ingeniería. Unos y otros estudiantes cursan las mismas asignaturas, y lo hacen simultáneamente, en la misma aula.
- El plan mantiene la estructura de prerrequisitos entre las asignaturas (ahora en forma cuatrimestral pura), pero aumentando el porcentaje de asignaturas obligatorias, tanto en el primer ciclo como en el segundo.
- Sin embargo, a pesar del aumento de la obligatoriedad, disminuye el total absoluto (y, más aún, el relativo) de matemáticas obligatorias en la carrera. Todas las titulaciones, técnicas y superior, prevén 3 asignaturas cuatrimestrales obligatorias de matemáticas, aunque la iniciativa del Departamento ha hecho aumentar el número de asignaturas optativas a 8 (cuatrimestrales). En total, los estudiantes sólo están obligados a cursar 13 horas semanales (por 15 semanas) de matemáticas, esto es, un total de 19,5 créditos (frente a los 48 del antiguo plan de estudios).
- Hay que destacar, en lo positivo, que se ha producido un cambio de orientación en las matemáticas que se enseñan, haciéndolas más específicas y relacionadas con la carrera de informática, y esto tanto desde el punto de vista de los contenidos como del de los métodos. Por lo que hace a los contenidos, sólo un vistazo a los nombres de las asignaturas basta para constatar el cambio (véanse las Tablas 13 y ??).

---

**Obligatorias:**

|    |                     |          |
|----|---------------------|----------|
| AL | Álgebra             | 6 cré.   |
| AM | Análisis Matemático | 6 cré.   |
| MD | Matemática Discreta | 7,5 cré. |

---

Cuadro 13: Asignaturas obligatorias del Departamento de Matemáticas en el plan de estudios vigente.

---

**Optativas:**

|      |  |          |
|------|--|----------|
| GEOC | Geometría Computacional                    | 7,5 cré. |
| C    | Criptografía                               | 6 cré.   |
| TIC  | Teoría de la Información y la Codificación | 6 cré.   |
| AAM  | Ampliación de Análisis Matemático          | 7,5 cré. |



|       |   |           |
|-------|---|-----------|
| ANL   | Análisis Numérico Lineal                    | 6 créd.   |
| MNB   | Métodos Numéricos Básicos                   | 6 créd.   |
| AMN   | Aceleración de Métodos Numéricos            | 4,5 créd. |
| EDMEF | Ec. Diferenciales y Método de Elem. Finitos | 7,5 créd. |

---

Cuadro 14: Asignaturas optativas del Departamento de Matemáticas en el plan de estudios vigente.

Además se ha procurado introducir un enfoque más algorítmico a todas las asignaturas, incluso a una tan clásica y básica como la de Álgebra. En cuanto a los métodos, todas las asignaturas incluyen clases de teoría, de problemas y de laboratorio, y estas últimas se llevan a cabo en el Laboratorio de Cálculo de la Facultad, con el uso de *Mathematica*, *Maple* y otros manipuladores simbólicos.

## 7. Perspectivas de futuro

La Facultad ha iniciado el proceso de revisión del actual plan de estudios, y se han establecido ya las directrices generales de la revisión. Por ahora, las perspectivas son muy positivas, puesto que las directrices se caracterizan, esencialmente, por intentar racionalizar el plan de estudios (eliminar la gran dispersión de pequeñas asignaturas, simplificar el intrincado árbol de prerrequisitos, aumentar ligeramente el número de créditos totales de la carrera, etc.) y por hacer más énfasis en las asignaturas formativas básicas, no sólo de matemáticas, pero también de matemáticas.

En mi opinión, y por lo que se refiere a las asignaturas de matemáticas, la revisión del plan de estudios de la facultad debería consolidar y ampliar los aspectos más positivos del plan de estudios actual (particularmente, en lo que se refiere a la especificidad de las asignaturas de matemáticas y a la metodología de su impartición) y debería dar un giro radical de orientación en los aspectos más negativos y deficitarios (falta de peso específico y de relevancia de las asignaturas de matemáticas, principalmente). Las líneas principales deberían, pues, ser las siguientes.

**Asignaturas obligatorias:** La revisión del plan de estudios debería inclinarse por seguir las recomendaciones de *Curriculum '91*. Existe un claro consenso sobre la necesidad de aumentar los créditos de las matemáticas obligatorias, tal como se recoge en la Tabla 15. Este aumento debería favorecer, por parte del estudiante, un aprendizaje más profundo, menos mecánico y

| <b>Asignatura</b>   | <b>Actual</b> | <b>Previsión</b> |
|---------------------|---------------|------------------|
| Álgebra             | 6             | 9                |
| Análisis Matemático | 6             | 9                |
| Matemática Discreta | 7,5           | 7,5              |

Cuadro 15: Aumento previsible de los créditos obligatorios de matemáticas en el plan de estudios.

superficial, de unos contenidos que, en mi opinión, no deberían alterarse más que parcial y localmente, sino que deberían ser, esencialmente, los que se imparten en la actualidad.

**Asignaturas optativas:** Se constata el gran éxito de las que se introdujeron con el nuevo plan de estudios, particularmente de la Geometría Computacional, así como de la Criptografía, lo cual se interpreta como una consecuencia de su carácter más específicamente relacionado con la informática. En esta línea, se deberían incluir en el plan de estudios dos nuevas asignaturas optativas de matemáticas específicamente diseñadas para estudiantes de informática: Combinatoria y Geometría Algorítmica.

La asignatura de Combinatoria se ofrecería como continuación natural de la de Matemática Discreta, y sus objetivos principales serían la ampliación del estudio de los temas de coloreado y emparejamientos, así como el análisis y modelado de redes, flujos, etc. Concretamente, se podría tratar de una asignatura de 7,5 créditos, cuyo temario previsto, indicativamente, sería el siguiente<sup>1</sup>:

- 
1. Preliminares: breve revisión de los conceptos básicos de grafos.
  2. Digrafos: digrafos acíclicos, torneos, flujos, digrafos eulerianos.
  3. Coloreado: vértice-coloreado, aristo-coloreado, algoritmos voraces.
  4. Emparejamientos: teorema de Hall, algoritmos de emparejamientos máximos, emparejamientos con pesos.
  5. Flujos en redes y conectividad: teorema del flujo máximo y del corte mínimo, teoremas de Menger.
  6. Modelos de redes de interconexión: hipercubos, grafos de De Bruijn, grafos mariposa.
- 

<sup>1</sup>La presente propuesta se debe al profesor Marc Noy, del Departamento de Matemática Aplicada II de la UPC.

## Cuadro 16: Temario propuesto para la asignatura optativa de Combinatoria

Esta propuesta implicaría reformular ligeramente la asignatura de Matemática Discreta, para coordinarla eficazmente con la nueva optativa. En mi opinión, los temas relativos a coloreado y emparejamientos no deberían desaparecer completamente de la asignatura obligatoria, porque ello implicaría su desconocimiento absoluto por parte de muchos estudiantes. Sin embargo, se podría poner algo menos de énfasis en ellos, presentarlos de forma más descriptiva, y aligerar así un poco la asignatura, que cubre, en este momento, muchos aspectos de combinatoria y teoría de grafos, y resulta algo extensa para estudiantes de este nivel.

En cuanto a la nueva asignatura dedicada a la Geometría Algorítmica, ya existen experiencias análogas en facultades de informática de otras universidades, como la Universidad Politécnica de Madrid, así como en otra facultad de la misma Universidad Politécnica de Catalunya (la Facultad de Matemáticas). Las experiencias indican el interés de tal asignatura, y es muy recomendable que se acabe implantando también en la Facultad de Informática de Barcelona. De ser así, se trataría de una asignatura centrada en el estudio de los algoritmos geométricos, su corrección y eficiencia. Su interés principal consistiría en mostrar cómo las propiedades geométricas de ciertos problemas permiten resolverlos de forma eficiente, siempre que se exploren las estructuras de datos y los esquemas algorítmicos adecuados. Su temario, indicativamente, sería el siguiente<sup>2</sup>:

- 
1. Presentación: problemas introductorios.
  2. Preliminares: breve revisión de los modelos de computación, las estructuras de datos y los métodos algorítmicos básicos.
  3. Polígonos: representación, operaciones primitivas, triangulaciones, problemas de visibilidad.
  4. Envolverte convexa: algoritmos bidimensionales, optimalidad, algoritmo tridimensional.
  5. Problemas de proximidad: diagramas de Voronoi y triangulaciones de Delaunay. Aplicaciones.
  6. Localización en el plano: el algoritmo de Kirkpatrick.
  7. Arreglos de hiperplanos: estructura geométrica y construcción.

---

<sup>2</sup>El temario propuesto es una adaptación del que actualmente imparte el profesor Ferran Hurtado, del Departamento de Matemática Aplicada II de la UPC, en la Facultad de Matemáticas.

## 8. Programación lineal y problemas afines.

---

Cuadro 17: Temario propuesto para la asignatura optativa de Geometría Algorítmica.

**Metodología:** Debería mantenerse la línea iniciada con la implantación del plan de estudios actual (uso de software matemático en prácticas de laboratorio, enfoque algorítmico y constructivo de los temas estudiados, etc.). por su parte, los profesores de matemáticas deberían hacer un nuevo esfuerzo por ofrecer, junto con los aspectos teóricos de las asignaturas, aplicaciones y ejemplos directamente vinculados con la informática, de forma coordinada con los profesores de las asignaturas más específicamente informáticas.

Finalmente, hay que destacar, en el ámbito de lo metodológico, que se empieza a concretar el proyecto, por parte de la Universidad, de apoyar la docencia con herramientas de autoaprendizaje, aprovechando las posibilidades que ya en este momento ofrecen las aplicaciones multimedia y su acceso a través de la red. También en este aspecto, el Departamento de Matemática Aplicada II es pionero y participa en diversos proyectos de los que la Facultad de informática se verá, sin duda, beneficiada. Pero esto ya es harina de otro costal.

## Referencias

- [1] ACM Curriculum Committee on Computer Science. Curriculum '68. Recommendations for academic programs in computer science. *Commun. ACM*, 11(3):151–197, 1968.
- [2] ACM Curriculum Committee on Computer Science. Curriculum recommendations for the undergraduate program in computer science. *SIGCSE Bulletin (ACM)*, 9(2):1–16, 1977.
- [3] ACM Curriculum Committee on Computer Science. Curriculum '78. Recommendations for academic programs in computer science. *Commun. ACM*, 22(3):147–166, 1978.
- [4] ACM Curriculum Committee Task Force for CS1. Recommended curriculum for cs1, 1984. *Commun. ACM*, 27(10):998–1001, 1984.
- [5] ACM Curriculum Committee Task Force for CS2. Recommended curriculum for cs2, 1984. *Commun. ACM*, 28(8):815–818, 1985.
- [6] ACM Task Force on the Core of Computer Science. Computing as a discipline. *Commun. ACM*, 32(1):9–23, 1989.
- [7] ACM/IEEE Computer Science Joint Curriculum Task Force. Computing curricula 1991. *Commun. ACM*, 34(6):69–84, 1991.
- [8] ACM/IEEE Computer Society Joint Task Force. Computer science program requirements and accreditation. *Commun. ACM*, 27(4):330–335, 1984.
- [9] A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, and M. A. Laurentiev. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Ed., 1973.
- [10] P. J. Denning. The science of computing. What is computer science? *American Scientist*, 73:16–19, 1985.
- [11] N. Gibbs and A. Tucker. A model curriculum for a liberal arts degree in computer science. *Commun. ACM*, 29(3):202–210, 1986.
- [12] IEEE Education Activities Board (Model Program Committee). Model program in computer science and engineering. Technical Report EHO 212-1, IEEE Publ., 1983.

- [13] IEEE Education Committee (Model Curriculum Subcommittee). A curriculum in computer science and engineering. Technical Report EHO 119-8, IEEE Publ., 1977.
- [14] D. Knuth. *The art of computer programming. Fundamental algorithms*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1973.
- [15] D. Knuth. Computer science and its relation to mathematics. *Amer. Math. Monthly*, 81:323–343, 1974.
- [16] D. Knuth. Algorithmic thinking and mathematical thinking. *Amer. Math. Monthly*, 92:170–181, 1985.
- [17] A. Newell, A. Perlis, and H. Simon. What is computer science? *Science*, 157:1372–1374, 1967.
- [18] A. Ralston. Computer science, mathematics, and the undergraduate curricula in both. *Amer. Math. Monthly*, 88(7):472–485, 1981.
- [19] A. Ralston. The first course in computer science needs a mathematics corequisite. *Commun. ACM*, 27(10):1002–1005, 1984.
- [20] A. Ralston and M. Shaw. Curriculum '78 – is computer science really that unmathematical? *Commun. ACM*, 23(2):67–70, 1980.