Geometria per a Sistemes Multimèdia

Curs 1999–2000

Vera Sacristán

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
—
Escola Multimèdia
Fundació Politècnica de Catalunya

Índex

1 Objectes geomètrics bàsics

1.1 Al pla

Rectes, segments, semirrectes i semiplans

Una *recta* està formada pels punts que es recorren en desplaçar un punt donat en una direcció donada. Per tant, una recta queda determinada en conèixer un punt i la direcció de la mateixa. Això és equivalent a conèixer-ne dos punts.

Una recta determina dues regions del pla, anomenades *semiplans:* dos punts exteriors a la recta pertanyen al mateix semiplà si es poden unir mitjançant una línia contínua que no talli la recta.

Una *semirrecta* és una porció de recta delimitada per un punt de la mateixa, anomenat *origen* de la semirrecta.

Un *segment* és una porció de recta delimitada per dos punts d'aquesta, anomenats *extrems* del segment.

Poligonals i polígons

La *poligonal* determinada pels punts (*vèrtexs*) $P_0, P_1, \ldots, P_n$ és el conjunt dels segments (*costats, arestes*) consecutius $\overline{P_{i-1}P_i}$, amb $i = 1 \ldots n$.

Una *poligonal tancada* o *polígon* és aquella que compleix $P_0 = P_n$.

Un *polígon simple* és el que no té autointerseccions, és a dir, aquell en què només els costats consecutius comparteixen punts en comú i, concretament, només comparteixen el vèrtex comú.

Un *polígon convex* és la intersecció fitada d'un conjunt finit de semiplans. Dit altrament, és un polígon simple tal que els angles interiors que formen els costats consecutius són tots convexos (aguts).

Un *polígon regular* és un polígon convex en què tots els angles interiors i tots els costats són iguals.

Circumferències i cercles

La *circumferència* de centre C i radi $r > 0$ és el conjunt de tots els punts del pla situats a distància r del punt C. Si considerem els punts a distància de C menor o igual que r, obtenim un *cercle.*

Un *arc de circumferència* és una porció connexa de circumferència, i està delimitat per dos punts d'aquesta, anomenats *extrems.*

Un *sector circular* és el conjunt de tots el punts d'un cercle compresos entre dos radis.

Una *corona circular* és la porció del pla limitada per dues circumferències concèntriques.

1.2 A l'espai

Plans i semiespais

Un *pla* és el conjunt de punts de l'espai que s'obtenen, a partir d'un punt donat, en desplaçar-lo mitjançant la combinació de dues direccions donades. Així, un pla està determinat per un punt i dues direccions. Equivalentment, un pla està determinat per tres punts.
Un pla determina dos *semiespais:* dos punts exteriors al pla pertanyen al mateix semiespai si es poden unir mitjançant una línia contínua que no talli el pla.

Políedres

Una *superfície polièdrica* és un conjunt finit de polígons plans (*cares*) tal que cada costat (*aresta*) d'una cara pertany exactament a una altra cara (les dues cares s'anomenen *adjacents* o *incidents*).

Un *políedre convex* és una regió fitada de l'espai obtinguda per intersecció finita de semiespais. La seva frontera és una superfície polièdrica.

Un *políedre regular* és un políedre convex que té totes les cares regulars i iguals, i tots els vèrtexs de mateix grau. Els políedres regulars són cinc: tetràedre, cub (o hexàedre), octàedre, dodecàedre i icosàedre.

Superfícies notables

Un *prisma* és la superfície formada per totes les rectes que passen per un polígon donat i són paral·leles a una direcció donada (no paral·lela al polígon). Si la direcció de les rectes és perpendicular al polígon, el prisma s'anomena *recte.*

Un *cilindre circular* és la superfície formada per totes les rectes que passen per una circumferència donada i són paral·leles a una direcció fixada, no paral·lela al pla que conté la circumferència. Si la direcció de les rectes és perpendicular a la d'aquest pla, el cilindre s'anomena *recte.*

Una *piràmide* és la superfície determinada per totes les rectes que passen per un polígon donat i per un punt fix, no coplanari amb el polígon. Aquest punt s'anomena *vèrtex* de la piràmide.

Un *con circular* és la superfície determinada per totes les rectes que passen per una circumferència i per un punt fix, no coplanari amb ella. Aquest punt s'anomena *vèrtex* del con. Si la recta que passa pel vèrtex del con i pel centre de la circumferència és perpendicular a aquesta, el con s'anomena *recte.*

Una *esfera* està formada per tots els punts de l'espai que disten una quantitat fixa, $r > 0$, anomenada *radi*, d'un punt donat, C, anomenat *centre* de l'esfera.

Un *tor* és la superfície generada per un circumferència, en girar al voltant d'una recta (*eix* del tor) que li és coplanària i exterior. El pla que passa pel centre de l'esmentada circumferència i és perpendicular a l'eix del tor s'anomena *pla diametral* del tor. El punt on l'eix i el pla diametral es tallen s'anomena *centre* del tor.

1.3 Operacions booleanes

Es tracta de les operacions bàsiques que permeten construir nous objectes a partir d'objectes geomètrics bàsics.

Unió

La unió $O_1 \cup O_2$ de dos objectes, O_1 i O_2, està formada per tots els punts de l'espai que pertanyen a un dels objectes o a tots dos.

Intersecció

La intersecció $O_1 \cap O_2$ de dos objectes, O_1 i O_2, està formada per tots els punts de l'espai que pertanyen tots dos objectes.

Diferència

La diferència $O_1 - O_2$ de dos objectes, O_1 i O_2, està formada per tots els punts de l'espai que pertanyen al primer però no al segon. Així, aquesta operació no és commutativa.

1.4 Exercicis

1 Considereu en el pla una recta r i un punt P que no pertany a r. Quántes rectes que passen per P estan totalment contingudes dins un dels dos semiplans que determina r?

2 Quants vèrtexs concaus pot tenir un triangle com a molt? I un quadrilàter? I un pentàgon? I, en general, un n-gon?

3 Quina mesura tenen cada un dels angles interiors d'un polígon regular de 3, 4, 5 o 6 costats? I, en general, els d'un polígon regular de n costats?

4 Quina mesura tenen cada un dels angles exteriors en un polígon regular de 3, 4, 5 o 6 costats? I, en general, els d'un polígon regular de n costats?

5 Ens demanen que fem un mosaic amb tot de peces poligonals. Si totes les peces han de ser iguals i han de ser polígons regulars, demostreu que només es pot fer el mosaic de tres maneres: amb triangles equilàters, amb quadrats o amb hexàgons regulars.

6 Demostreu que qualsevol paral·lelògram pot formar mosaic. Demostreu que qualsevol triangle pot formar mosaic.

7 Donat un cercle de centre C i radi r, considereu un punt P a distància $r/3$ de C. Quin és el radi màxim d'un cercle centrat en P i totalment contingut dins el primer?

8 Un dels políedres regulars és una piràmide. Quin? Un dels políedres regulars és un prisma. Quin?

9 Comproveu que tots els políedres regulars satisfan la fórmula d'Euler:

$$v + c = a + 2,$$

on v indica el nombre de vèrtexs del políedre, c el nombre de cares i a el nombre d'arestes.

10 Enganxem dos cubs per un vèrtex. Val la fórmula d'Euler per a aquesta figura composta?

11 Calculeu v, a i c per a una piràmide que té per base un polígon de n costats. Val la fórmula d'Euler?

12 Dibuixeu un políedre tal que $v = 4$ i $a = 6$, i un altre tal que $c = v = 6$.

2 Càlcul matricial

2.1 Operacions amb vectors

Suma:	$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
Producte per escalars:	$a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$

2.2 Operacions amb matrius

Producte matriu × vector:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_1^j x_j \\ \sum_j a_2^j x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_m^j x_j \end{pmatrix}$$

Producte matriu × matriu:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \cdots & b_1^p \\ b_2^1 & b_2^2 & \cdots & b_2^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n^1 & b_n^2 & \cdots & b_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \cdots & c_1^p \\ c_2^1 & c_2^2 & \cdots & c_2^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_m^1 & c_m^2 & \cdots & c_m^p \end{pmatrix}$$

$$\text{on } c_i^j = \sum_{k=1}^{n} a_i^k b_k^j.$$

2.3 Determinants

Al pla:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

A l'espai:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2.$$

En general:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)}^1 a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(n)}^n.$$

Un determinant també es pot desenvolupar per una fila o columna. Per exemple:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Considereu una matriu quadrada, A.
A és invertible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Considereu n vectors $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
$e_1, e_2, \ldots, e_n$ són linealment independents $\Longleftrightarrow \det(e_1, e_2, \ldots, e_n) \neq 0$.

2.4 Sistemes d'equacions lineals

Un sistema de m equacions lineals amb n variables té la forma següent:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n &= b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \ldots + a_m^n x_n &= b_m \end{aligned}$$

Matricialment, es pot escriure així:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Resoldre el sistema consisteix a trobar quins valors de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satisfan les igualtats anteriors. Això es pot fer mitjançant el mètode de Gauss, que consisteix a fer transformacions elementals a les files de la matriu ampliada del sistema. Les transformacions elementals permeses són les següents:

- multiplicar o dividir una fila per un nombre no nul,
- transposar dues files,
- sumar o restar a una fila un múltiple o divisor d'una altra fila.

El sistema està resolt quan totes les columnes possibles (començant de esquerra a dreta) no contenen més que zeros i, com a molt, un ú.

2.5 Exercicis

13 Sigui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comproveu que les matrius B de la forma $B = \lambda A + \mu I$, amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, commuten amb A.

14 Trobeu totes les matrius que commuten amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

15 Trobeu totes les matrius que commuten amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

16 Trobeu les matrius X tals que $AX = 0$, on $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

17 Calculeu els determinants de les matrius següents:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

18 Determineu per quins valors de K el sistema següent té solució no trivial. Estudieu en cada cas la solució:

$$\left.\begin{array}{r} x + (k+1)y + z = 0 \\ x + y + (k+1)z = 0 \\ (k+1)x + y + z = 0 \end{array}\right\}$$

19 Resoleu el sistema homogeni que té per matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}.$$

20 Discutiu i resoleu, quan sigui possible, el sistema d'equacions següent:

$$\left\{\begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{array}\right.$$

3 Les eines de la geometria afí

3.1 Sistemes de coordenades al pla

Un *sistema de coordenades* es composa de:

- un punt O (anomenat origen),
- dos vectors $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ linealment independents (que determinen els eixos).

El fet de fixar l'origen de coordenades permet identificar cada punt P del pla amb el seu *vector posició*, $\overrightarrow{OP}$. El fet de fixar una base permet identificar cada vector posició $\overrightarrow{OP}$ amb un parell de nombres $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, anomenats *coordenades*, de tal manera que

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

3.2 Punts i rectes del pla

Cada *punt* P s'identifica, per tant, amb un parell $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Donat un punt P i un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$, la *recta* que passa per P i té vector director $\vec{v}$ és el conjunt de punts X del pla de la forma $P + t\vec{v}$, on $t \in \mathbb{R}$. Hi ha diverses maneres d'expressar l'equació d'una recta:

- Eq. vectorial:
$$X = P + t\vec{v}, \quad \text{on } t \in \mathbb{R}.$$
- Eq. paramètrica:
$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{array}\right\} \quad \text{on } t \in \mathbb{R},$$
prenent $P = (x_0, y_0)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$.
- Eq. implícita:
$$Ax + By + C = 0 \qquad \text{o també} \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$
prenent $P = (x_0, y_0)$ i $\vec{v} = (B, -A)$.
- Eq. explícita:
$$y = mx + n \quad (\text{sempre que } B \neq 0),$$
on m és el pendent de la recta i n és l'ordenada a l'origen.

3.3 Segments, semirrectes i semiplans

La *semirrecta* amb origen en un punt P, que passa per un altre punt Q té equació

$$X = P + t\overrightarrow{PQ}, \quad \text{on } t \geq 0.$$

El *segment* d'extrems P i Q té equació

$$X = P + t\overrightarrow{PQ}, \quad \text{on } 0 \leq t \leq 1,$$

és a dir,

$$X = (1-t)P + tQ, \quad \text{on } 0 \leq t \leq 1.$$

Els dos *semiplans* determinats per la recta d'equació $ax + by + c = 0$ tenen equacions respectives

$$ax + by + c \geq 0 \qquad \text{i} \qquad ax + by + c \leq 0.$$

3.4 Sistemes de coordenades a l'espai

Un *sistema de coordenades* es composa de:

- un punt O (anomenat origen),
- tres vectors $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ linealment independents (que determinen els eixos).

El fet de fixar l'origen de coordenades permet identificar cada punt P del pla amb el seu *vector posició*, $\overrightarrow{OP}$. El fet de fixar una base permet identificar cada vector posició $\overrightarrow{OP}$ amb una terna de nombres $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, anomenats *coordenades*, de tal manera que

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

3.5 Punts, rectes i plans de l'espai

Cada *punt* P s'identifica, per tant, amb una terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Donat un punt P i un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$, la *recta* que passa per P i té vector director $\vec{v}$ és el conjunt de punts X del pla de la forma $P + t\vec{v}$, on $t \in \mathbb{R}$. Hi ha diverses maneres d'expressar l'equació d'una recta:

- Eq. vectorial:
$$X = P + t\vec{v}, \quad \text{on } t \in \mathbb{R}.$$
- Eq. paramètrica:
$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{on } t \in \mathbb{R},$$
prenent $P = (x_0, y_0, z_0)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.
- Eq. implícita:
$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned}\right\},$$
on (A, B, C) i (A', B', C') són linealment independents.

Donat un punt P i dos vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ linealment independents, el *pla* que passa per P i té subespai director generat per $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ és el conjunt de punts X del pla de la forma $P + t\vec{u} + s\vec{v}$, on $t, s \in \mathbb{R}$. Hi ha diverses maneres d'expressar l'equació d'un pla:

- Eq. vectorial:
$$X = P + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad \text{on } t, s \in \mathbb{R}.$$

- Eq. paramètrica:
$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{array}\right\} \quad \text{on } t, s \in \mathbb{R},$$
prenent $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

- Eq. implícita:
$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{o també} \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$
prenent $P = (x_0, y_0, z_0)$.

3.6 Segments, semirrectes i semiespais

La *semirrecta* amb origen en un punt P, que passa per un altre punt Q té equació
$$X = P + t\overrightarrow{PQ}, \quad \text{on } t \geq 0.$$
El *segment* d'extrems P i Q té equació
$$X = P + t\overrightarrow{PQ}, \quad \text{on } 0 \leq t \leq 1,$$
és a dir,
$$X = (1 - t)P + tQ, \quad \text{on } 0 \leq t \leq 1.$$
Els dos *semiespais* determinats pel pla d'equació $ax + by + cz + d = 0$ tenen equacions respectives
$$ax + by + cz + d \geq 0 \qquad \text{i} \qquad ax + by + cz + d \leq 0.$$

3.7 Exercicis

21 Siguin $P = (1, 2)$, $Q = (-1, 3)$ i $\vec{u} = (1, -1)$.

a) Calculeu l'equació de la recta que passa per P i té vector director $\vec{u}$.

b) Calculeu l'equació de la recta que passa per P i Q.

c) Calculeu l'equació de la recta que passa per P i és paral·lela a la recta r d'equació $(x, y) = (3, 4) + t(2, 1)$, on $t \in \mathbb{R}$.

d) Calculeu l'equació de la recta que passa per P i és paral·lela a la recta s d'equació $2x - y = 5$.

e) Calculeu l'equació de la recta que passa per P i té pendent $1/3$.

22 Siguin $P = (1, 1, -1)$, $Q = (0, 1, 2)$ i $\vec{u} = (-1, 2, 0)$.

a) Calculeu l'equació de la recta que passa per P i té vector director $\vec{u}$.

b) Calculeu l'equació de la recta que passa per P i Q.

c) Calculeu l'equació de la recta que passa per P i és paral·lela a la recta r d'equació $3x - y + z = 1, x + y - 3z = 0$.

d) D'entre totes les rectes que passen per P, trobeu la que talla a les dues rectes s_1 i s_2, on s_1 té equació $(x, y, z) = (1, 1, 2) + t(2, -1, 3)$, amb $t \in \mathbb{R}$, i s_2 té equació $(x, y, z) = (0, 1, 1) + s(-3, 1, 2)$, amb $s \in \mathbb{R}$.

23 Siguin $P = (1, 2, 3)$, $Q = (-1, -2, -3)$, $R = (0, 1, -1)$, $\vec{u} = (0, 1, -1)$ i $\vec{v} = (5, 1, 2)$.

a) Calculeu l'equació del pla que passa per R i té subsespai director generat per $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

b) Calculeu l'equació del pla que passa per P, Q i R.

24 Calculeu l'equació del pla que passa per $(0, 2, 1)$, és paral·lel a la recta r d'equació $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(1, 2, 1)$, i conté el punt $(1, 3, 0)$.

25 Calculeu l'equació del pla que passa per $(2, 1, 1)$ i conté la recta s d'equació $3x + y - z = 2, -2y + z = 1$.

4 Les eines de la geometria euclidiana

4.1 Geometria mètrica al pla

El *producte escalar* de vectors és l'operació següent:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{array}$$

La *norma* de vectors és l'aplicació següent:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \longmapsto & \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \end{array}$$

La *distància* entre punts és l'aplicació següent:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - P\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \end{array}$$

L'*angle* entre vectors és l'aplicació següent:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \arccos \dfrac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \end{array}$$

De fet, això tan sols defineix la *magnitud* de l'angle. L'*orientació* de l'angle ve donada pel signe del determinant $det(\vec{u}, \vec{v})$.

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ s'anomenen *ortogonals* si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Dues rectes s'anomenen *paral·leles* si els seus vectors directors són linealment dependents. Dues rectes s'anomenen *perpendiculars* si els seus vectors directors són ortogonals. En general, l'angle entre dues rectes es defineix com l'angle que formen els seus vectors directors.

Un sistema de coordenades s'anomena *cartesià* si els vectors $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ que en formen la base són ortogonals i unitaris. A més, es diu que el sistema és d'*orientació positiva* si $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) > 0$.

4.2 Geometria mètrica a l'espai

El *producte escalar* de vectors és l'operació següent:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \end{array}$$

La *norma* de vectors és l'aplicació següent:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \longmapsto & \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \end{array}$$

La *distància* entre punts és l'aplicació següent:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - P\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2} \end{array}$$

L'*angle* entre vectors és l'aplicació següent:

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \arccos \dfrac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \end{array}$$

No té sentit, en dimensió tres, parlar de l'orientació de l'angle que formen dos vectors.

El *producte vectorial* de vectors és l'aplicació següent:

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) \end{array}$$

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ s'anomenen *ortogonals* si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors ortogonals i unitaris, aleshores $\vec{u} \wedge \vec{v}$ és unitari i ortogonal a $\vec{u}$ i $\vec{v}$ alhora. A més, els vectors $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ formen una base d'orientació positiva.

El vector (A, B, C) s'anomena *vector normal* al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ o, també, al d'equació $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Dues rectes s'anomenen *paral·leles* si els seus vectors directors són linealment dependents. Dues rectes s'anomenen *perpendiculars* si els seus vectors directors són ortogonals. En general, l'angle entre dues rectes es defineix com l'angle que formen els seus vectors directors.

Dos plans s'anomenen *paral·lels* si els seus vectors normals són linealment dependents. Dos plans s'anomenen *perpendiculars* si els seus vectors normals són ortogonals. En general, l'angle entre dos plans es defineix com l'angle que formen els seus vectors normals.

Un pla i una recta s'anomenen *paral·lels* si el vector director de la recta i el vector normal al pla són ortogonals. Un pla i una recta s'anomenen *perpendiculars* si el vector director de la recta i el vector normal al pla són linealment dependents. En general, l'angle entre una recta i un pla es defineix com el complementari de l'angle que formen el vector director de la recta i el vector normal al pla.

Un sistema de coordenades s'anomena *cartesià* si els vectors $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ que en formen la base són ortogonals i unitaris. A més, es diu que el sistema és d'*orientació positiva* si $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) > 0$.

4.3 Exercicis

26 Demostreu que els vectors del pla ortogonals al vector (a, b) són els múltiples de $(-b, a)$.

27 Demostreu que la recta $2x + y = 7, x - z = 1$ i el pla $x - 2y + z = 0$ són perpendiculars.

28 Trobeu l'equació de la recta que conté el punt $(2, 1, -5)$ i és perpendicular al pla $3x - z = 1$.

29 Trobeu el simètric del punt $(1, 2, 3)$ respecte del pla $x + y + z = 3$.

30 Parametritzeu la recta intersecció dels plans $x - y + z = 0$ i $x - z = 1$.

31 Calculeu l'angle que formen una recta de vector director $(1, -1, 2)$ i la recta $x - y + z = 0, x - z = 1$.

32 Dibuixeu, des del vèrtex d'un quadrat, dues rectes que bisequen els costats oposats. Calculeu l'angle que formen aquestes dues rectes.

33 Calculeu l'angle que forma una diagonal AB d'un cub amb una de les arestes incidents en el vèrtex A.

34 Siguin $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$. Digueu si les bases següents tenen orientació positiva o negativa:

$$\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_3 & e_2 \\ e_2 & e_1 & e_3 \\ e_2 & e_3 & e_1 \\ e_3 & e_1 & e_2 \\ e_3 & e_2 & e_1 \end{array}$$

35 Siguin $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$. Completeu les bases següents, per tal que tinguin orientació positiva:

$$\begin{array}{ccr} e_1 & e_2 & ... \\ e_1 & e_3 & ... \\ e_1 & ... & e_2 \\ e_1 & ... & -e_2 \\ ... & e_2 & e_1 \\ ... & e_2 & -e_3 \end{array}$$

36 Construïu un sistema de coordenades cartesianes d'orientació positiva al pla, de manera que l'eix Ox coincideixi amb la recta $x + y = 1$.

37 Construïu un sistema de coordenades cartesianes d'orientació positiva a l'espai, de manera que l'eix Oz coincideixi amb la recta d'equació $x + y + z = 1, z = 0$.

38 Construïu un sistema de coordenades cartesianes d'orientació positiva a l'espai, de manera que l'eix Oz sigui perpendicular al triangle de vèrtexs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ i passi pel seu baricentre.

39 Construïu un sistema de coordenades cartesianes d'orientació positiva a l'espai, de manera que l'eix Oz sigui perpendicular al triangle de vèrtexs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$, l'origen es trobi en el seu baricentre i l'eix Ox passi pel primer dels seus tres vèrtexs.

5 Canvis de sistemes de coordenades

Considerem dos sistemes de coordenades:

$$
\begin{aligned}
S &= (0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n),\\
S' &= (0'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_{,}{}').
\end{aligned}
$$

Cada punt P del pla s'expressa en ambdós sistemes així:

$$
P = \begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{en } S, \\ (x_1', x_2', \dots, x_n') & \text{en } S'. \end{cases}
$$

La relació entre les coordenades del punt P en cada un dels sistemes vé donada per l'equació matricial

$$X = AX' + W,$$

on A és la matriu formada pels vectors de la base $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'\}$ i W és el vector $\overrightarrow{OO'}$, expressats en el sistema S.

Dit altrament, si tenim

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{OO'} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + \dots + w_n\vec{e}_n,\\
&\vec{e}_1{}' = a_1^1\vec{e}_1 + a_2^1\vec{e}_2 + \dots + a_n^1\vec{e}_n,\\
&\vec{e}_2{}' = a_1^2\vec{e}_1 + a_2^2\vec{e}_2 + \dots + a_n^2\vec{e}_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\vec{e}_n{}' = a_1^n\vec{e}_1 + a_2^n\vec{e}_2 + \dots + a_n^n\vec{e}_n,
\end{aligned}
$$

aleshores el canvi de coordenades s'expressa així:

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.
$$

5.1 Exercicis

40 Considerem els dos sistemes de referència a $\mathbb{R}^2$ següents: $S = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ i $S' = (O'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$, on $\overrightarrow{OO'} = (2,3)$, $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ i $\vec{e}_2{}' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ en el sistema S. Obteniu:

a) les equacions del canvi de coordenades;

b) les coordenades en S del punt P, que té coordenades $(1,1)$ en el sistema S';

c) les coordenades en S' del punt Q, que té coordenades $(2,3)$ en el sistema S;

d) l'equació paramètrica en el sistema S de la recta r, que en S' té equació

$$\left.\begin{array}{l} x' = 1 + 2t \\ y' = -1 - t \end{array}\right\} \quad \text{on } t \in \mathbb{R};$$

e) l'equació cartesiana en el sistema S' de la recta s, que en S té equació $2x - y = 1$.

41 Considerem els dos sistemes de referència a $\mathbb{R}^3$ següents: $S = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ i $S' = (O'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$, on $\overrightarrow{OO'} = (-1, 8, 3)$, $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}' = 3\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3{}' = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$ en el sistema S. Obteniu:

a) les equacions del canvi de coordenades;

b) les coordenades en S del punt P, que té coordenades $(1, 2, -1)$ en el sistema S';

c) les coordenades en S' del punt Q, que té coordenades $(2, 0, -3)$ en el sistema S.

42 Considerem els dos sistemes de referència a $\mathbb{R}^3$ següents: $S = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ i $S' = (O'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$, on $\overrightarrow{OO'} = (-2, 3, 9)$, $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}' = -\vec{e}_1$ i $\vec{e}_3{}' = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$ en el sistema S. Considereu el pla d'equació $2x - 3y + z - 2 = 0$ en el sistema de referència S. Obteniu l'equació del pla en el sistema de referència S'.

43 Considerem el sistema de coordenades cartesianes habitual, i el quadrat unitari de vèrtexs $ABCD$ (recorrent el contorn en sentit antihorari), on $A = (2, 3)$ i on AB forma un angle de $60°$ amb la recta paral·lela a l'eix Ox que passa per A. Utilitzeu les formules del canvi de coordenades per obtenir les coordenades dels vèrtexs B, C i D.

44 Trobeu les equacions del canvi de coordenades 2D consistent a rotar els eixos un angle α, sense moure l'origen de coordenades.

45 Donat un tetràedre $ABCD$, considerem el sistema de referència $S' = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

a) Escriviu en la referència S' les equacions dels plans de les cares.

b) Si ara suposem que en el sistema de referència habitual les coordenades dels vèrtexs del tetràedre són $A = (3, 3, 4)$, $B = (1, 7, 0)$, $C = (4, 5, 0)$ i $D = (2, 2, 0)$, utilitzeu el resultat anterior per obtenir les equacions dels plans de les cares en el sistema de coordenades habitual.

46 Suposem donades les coordenades dels vèrtexs d'un dodecàedre de centre O i radi inscrit r. Trobeu el canvi de coordenades que permet obtenir els vèrtexs d'un dodecaèdre idèntic, dipositat per una cara sobre el triangle de vèrtexs $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ i $(0, 0, 3)$, de manera que el seu centre es projecti ortogonalment sobre el pla en el baricentre del triangle.

6 Transformacions afins

6.1 Conceptes generals

Una *afinitat* o *transformació afí* és una aplicació f d'un espai afí en ell mateix que, fixat un sistema de coordenades, es pot expressar matricialment així:

$$f(X) = AX + B.$$

És a dir:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Algunes afinitats mantenen les distàncies i els angles (*moviments rígids*), d'altres tan sols les proporcions i els angles (*semblances*) i d'altres ni això. Però totes transformen varietats lineals en varietats lineals de dimensió igual o inferior, i mantenen la dependència lineal, el paral·lelisme i la raó simple.

6.2 Afinitats principals al pla

Translacions

Una translació és una afinitat que té per matriu la identitat:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + b_1 \\ y + b_2 \end{pmatrix}.$$

L'escriurem $T_B(X) = X + B$.

Girs o Rotacions

La rotació d'angle α respecte de l'origen és la afinitat

$$G_\alpha^O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Quan $\alpha \in [0, \pi)$, el gir es considera positiu, i quan $\alpha \in (-\pi, 0]$, es considera negatiu. Quan $\alpha = \pi$, tenim

$$G_\pi^O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Aquest gir s'anomena *simetria central.*

Simetries axials

La simetria axial respecte de l'eix Ox és l'afinitat

$$S_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Homotècies

L'homotècia de raó r respecte de l'origen és l'afinitat

$$H_r^O \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Canvis d'escala

Un canvi d'escala respecte de l'origen és una afinitat del tipus

$$E^O_{\lambda_1 \lambda_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}.$$

Les homotècies són, en realitat, casos particulars de canvis d'escala.

Projeccions ortogonals

La projecció ortogonal sobre la recta $y = 0$ és l'afinitat

$$\Pi_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.3 Afinitats principals a l'espai

Translacions

La translació de vector B és l'afinitat

$$T_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + b_1 \\ y + b_2 \\ z + b_3 \end{pmatrix}.$$

Girs o rotacions

Els girs respecte dels tres eixos de coordenades són

$$G_\alpha^x \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$G_\alpha^y \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$G_\alpha^z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Quan $\alpha \in [0, \pi)$, el gir es considera positiu, i quan $\alpha \in (-\pi, 0]$, es considera negatiu. Quan $\alpha = \pi$, el gir s'anomena *simetria axial*.

Simetries especulars

La simetria especular respecte del pla xy és l'afinitat

$$S_{xy}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}.$$

Simetries centrals

La simetria central respecte de l'origen és l'afinitat

$$S^{O}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}.$$

Homotècies

L'homotècia de raó r respecte de l'origen és l'afinitat

$$H_r^{O}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Canvis d'escala

Els canvis d'escala respecte de l'origen són les afinitats

$$E^{O}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ \lambda_3 z \end{pmatrix}.$$

Les homotècies són, en realitat, casos particulars de canvis d'escala.

Projeccions ortogonals

La projecció ortogonal sobre el pla xy és l'afinitat

$$\Pi_{xy}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.4 Exercicis

47 Trobeu les equacions de la rotació del pla d'angle $\alpha = \pi/3$ amb centre $C = (1, 2)$.

48 Calculeu les equacions resultants d'efectuar, amb l'ordre indicat, les transformacions 2D següents:

a) rotació de 30° a l'entorn del punt $(2, 4)$, en sentit antihorari;

b) translació de vector $(5, -2)$.

49 Prenent tres punts del pla independents (no alineats), comproveu gràficament les dues afirmacions següents:

a) El producte de dues simetries axials d'eixos paral·lels és una translació. Quin és el seu vector?

b) El producte de dues simetries axials d'eixos que es tallen és un gir. Quin és el seu centre? I el seu angle?

50 Indiqueu quina pot ser una composició d'afinitats que transformi la circumferència de centre O i radi 1 en l'el·lipse de centre $C = (2, 5)$, semieixos $a = 3$ i $b = 2$ que té el semieix major formant un angle de $45°$ amb el semieix positiu d'abscisses.

51 Per concatenació d'afinitats al pla, transformeu el rectangle de vèrtexs $(1, 2)$, $(5, 2)$, $(5, 4)$, $(1, 4)$ en el quadrat de costat 2 que té un vèrtex en el punt $(1, 0)$, un costat paral·lel a la recta $y = x/2$, i està totalment contingut al semipla $y \geq 0$. Si eliminem aquesta darrera condició, quants quadrats es podrien fer? Com s'obtindrien?

52 Gireu la recta determinada pels punts $A = (1, 1, 1)$ i $B = (4, 3, 2)$, primer $30°$ respecte de l'eix Ox i després $60°$ respecte de l'eix Oy. Repetiu el procés en l'ordre invers i compareu els resultats.

53 Demostreu que, donat un segment $\overline{AB}$ i el seu punt mig M, en transformar $\overline{AB}$ per una afinitat qualsevol (en dimensió qualsevol), el transformat de M es el punt mig del nou segment.

54 Volem dur a terme un gir d'angle α a l'entorn de la recta de l'espai que passa pel punt $(1, 1, 1)$ i té vector director $(2, 2, 1)$. Descriviu el procès que permet obtenir aquest moviment per concatenació de moviments elementals. Obteniu les equacions del gir per al cas $\alpha = 30°$.

55 Volem centrar un con en el punt $(2, 3, -1)$, de tal manera que el seu eix formi un angle de $45°$ amb el pla xy, i tal que la projecció de l'eix sobre aquest pla formi un angle de $30°$ amb l'eix Ox. Quina concatenació d'afinitats permet obtenir el con a partir de la seva posició “standard” (vèrtex O i eix Oz)?

56 Volem situar un cilindre de radi 2 i altura 9 sobre el triangle de vèrtexs $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$, de tal manera que l'eix del cilindre passi pel baricentre del triangle. Quina concatenació d'afinitats permet obtenir aquest resultat a partir d'un cilindre de radi 1, altura 1 i eix Oz?

57 Volem situar un tor de radis $r = 1$, $R = 3$ sobre el pla $x + y + 2z = 4$, de tal manera que el seu centre es projecti perpendicularment sobre el pla en el punt $(1, 1, 1)$. Quina concatenació d'afinitats permet obtenir aquest resultat a partir del tor de centre O, radis $r = 1$, $R = 3$ i pla diametral $z = 0$?

7 Corbes

7.1 Formes d'expressar una corba

L'equació d'una corba s'anomena *explícita* si té la forma següent:

$$y = f(x), \qquad \text{amb } f \text{ contínua.}$$

Avantatge: Les corbes en forma explícita es poden representar fàcilment.
Inconvenient: No totes les corbes es poden expressar mitjançant una equació explícita.

L'equació d'una corba s'anomena *implícita* si té la forma següent:

$$F(x, y) = 0, \qquad \text{amb } F \text{ contínua.}$$

Avantatges: Totes les corbes es poden expressar mitjançant una equació implícita. La manipulació matemàtica i l'obtenció de propietats són més senzilles a partir de l'equació implícita d'una corba.
Inconvenient: Les corbes en forma implícita no es poden representar fàcilment.

L'equació d'una corba s'anomena *paramètrica* si té la forma següent:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \qquad \text{amb } x(t) \text{ i } y(t) \text{ contínues.}$$

Avantatges: Totes les corbes es poden expressar mitjançant una equació paramètrica. Les corbes en forma paramètrica es poden representar fàcilment.

7.2 Coordenades polars

Un cop fixat un sistema de coordenades, ja hem estudiat que tot punt del pla es pot expressar mitjançant les seves coordenades cartesianes, (x, y). De la mateixa manera, tot punt es pot expressar mitjançant les seves *coordenades polars*, (r, θ), on r indica la distància del punt a l'origen, i és un valor més gran o igual que 0, i θ indica l'angle que formen el vector posició del punt i la semirrecta positiva de l'eix de les abscisses.

Si es coneixen les coordenades polars d'un punt, es poden obtenir les seves coordenades cartesianes mitjançant el canvi següent:

$$\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}$$

7.3 Corbes notables

Còniques

Les còniques són corbes que tenen per equació implícita una equació polinòmica de grau dos. Si es prenen amb centre a l'origen de coordenades i eixos els de coordenades, les seves equacions són les següents:

Cònica	**Eq. implícita**	**Parametrització**
Paràbola	$y = ax^2$	$\left.\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = at^2 \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}.$
El.lipse	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\left.\begin{array}{l} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi].$
Circumferència	$x^2 + y^2 = r^2$	$\left.\begin{array}{l} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi].$
Hipèrbola	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\left.\begin{array}{l} x(t) = \pm a\sec t \\ y(t) = b\tan t \end{array}\right\} \quad t \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$
		$\left.\begin{array}{l} x(t) = \pm a\cosh t \\ y(t) = b\sinh t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}.$

Espirals

Espiral d'Arquímedes $\qquad r = a\theta, \quad \text{amb } \theta \geq 0.$

Espiral logarítmica $\qquad r = e^{a\theta}, \quad \text{amb } \theta \in \mathbb{R}.$

Altres corbes planes

Cardioide $\qquad r = a(1 + \cos\theta), \quad \text{amb } \theta \in [0, 2\pi].$

Rodonea $\qquad \left.\begin{array}{l} x(t) = a\cos mt\cos t \\ y(t) = a\cos mt\sin t \end{array}\right\}, \quad \text{amb } t \in [0, 2\pi].$

Algunes corbes no planes

Hèlix circular $\qquad \left.\begin{array}{l} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \\ z(t) = ct \end{array}\right\}, \quad \text{amb } t \in \mathbb{R}.$

Hèlix espiral $\qquad \left.\begin{array}{l} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \\ z(t) = ct \end{array}\right\}, \quad \text{amb } t \geq 0.$

7.4 Corbes de Bézier

La *corba de Bézier* que té com a vèrtexs de control $n+1$ punts $P_0, \ldots, P_n$ del pla o de l'espai es parametritza així:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i, \qquad \text{on } t \in [0, 1],$$

i té les propietats següents:

a) Si el nombre de vèrtexs de control que defineixen la corba és $n+1$, aleshores el grau de la corba és n.

b) La corba est continguda dins l'envolupant convexa dels vèrtexs de control.

c) L'origen de la corba es troba al punt P_0 i el final al P_n.

d) La corba segueix la forma de la poligonal de control, amb un nombre d'oscil.lacions mai superior al de la poligonal.

e) El control de cada vèrtex sobre la corba és global, no local.

f) La corba és invariant per transformacions afins.

7.5 Exercicis

58 Els punts següents es donen en coordenades cartesianes: $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,4)$, $(2,1)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Expresseu-los en coordenades polars.

59 Parametritzeu una paràbola d'obertura $a = 3$, vèrtex $(2,5)$, eix la recta r d'equació $2x + 3y = 19$, totalment continguda dins el semiplà $y \geq 0$.

60 Considereu l'el.lipse d'equació $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Situeu-ne una còpia amb centre al punt $(5,3)$, de tal manera que el semieix més gran sigui para.lel a la recta $y = -x$. Parametritzeu la meitat superior de l'el.lipse resultant.

61 Volem situar una espiral d'Arquímedes $r = \frac{1}{4}\theta$ que dóna 3 voltes a l'entorn de l'origen sobre el triangle de vèrtexs $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$, de tal manera que el centre de l'espiral es trobi en el baricentre del triangle. Trobeu una parametrització d'aquesta corba.

62 Volem situar una rodonea de 5 pètals i radi 4 a l'espai, centrant-la en el punt $(1,1,1)$, en posició perpendicular al pla $x + y + z = 3$, i de tal manera que un dels pètals segueixi la direcció del centre de la rodonea cap al punt $(0,0,3)$ del pla. Trobeu una parametrització d'aquesta corba.

63 Trobeu una parametrització d'una hèlix circular de radi 2, pas de rosca $1/2$ i que dóna 5 voltes, situada sobre el triangle de vèrtexs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, amb l'eix paral.lel al triangle.

64 Una xemeneia industrial té forma de con truncat. Com podem dissenyar la barana d'una escala de cargol que permeti pujar fins dalt de la xemeneia?

65 Dissenyeu una corba de Bézier plana que serveixi com a perfil d'un banc semblant als que es troben al "hall" de l'escola.

66 Considereu un cilindre circular de radi r, i una hèlix circular que dóna dues voltes sobre el cilindre. Suposeu que prenem un cert nombre de punts de l'hèlix i els fem servir com a vèrtexs de control d'una corba de Bézier tridimensional. Es veura la corba de Bézier des de l'exterior del cilindre?

8 Superfícies

8.1 Formes d'expressar una superfície

L'equació d'una superfície s'anomena *explícita* si té la forma següent:

$$z = f(x, y), \qquad \text{amb } f \text{ contínua.}$$

L'equació d'una superfície s'anomena *implícita* si té la forma següent:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \text{amb } F \text{ contínua.}$$

L'equació d'una superfície s'anomena *paramètrica* si té la forma següent:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{array}\right\} \qquad \text{amb } x(t, s),\ y(t, s) \text{ i } z(t, s) \text{ contínues.}$$

Com en el cas de les corbes, cada forma té els seus avantatges i els seus inconvenients. Per als nostres objectius de representació gràfica, la forma paramètrica és la més adient.

8.2 Coordenades cilíndriques i coordenades esfèriques

Un cop fixat un sistema de coordenades, ja hem estudiat que tot punt de l'espai es pot expressar mitjançant les seves coordenades cartesianes, (x, y, z). Aquesta no és l'única manera.

Coordenades cilíndriques: tot punt P de l'espai es pot expressar mitjançant les seves *coordenades cilíndriques*, (r, θ, z) on, si considerem la projecció ortogonal P' de P sobre el pla xy, r i θ són les coordenades polars de P' en el pla xy i z és la tercera coordenada cartesiana de P.
Si es coneixen les coordenades cilíndriques (r, θ, z) d'un punt, es poden obtenir les seves coordenades cartesianes mitjançant el canvi següent:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Coordenades esfèriques: tot punt P de l'espai es pot expressar mitjançant les seves *coordenades esfèriques*, (ρ, θ, φ) on ρ indica la distància de P a l'origen, θ indica la *longitud* de P (és a dir, coincideix amb la coordenada cilíndrica de mateix nom) i φ indica la *latitud* de P (l'angle que forma el vector posició de P amb el pla xy).
Si es coneixen les coordenades esfèriques (ρ, θ, φ) d'un punt, es poden obtenir les seves coordenades cartesianes mitjançant el canvi següent:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\cos\theta \\ y &= \rho\cos\varphi\sin\theta \\ z &= \rho\sin\varphi \end{aligned}$$

8.3 Superfícies notables

Cilindres

El cilindre recte amb *corba directriu* C i *eix* e és la superfície generada per una recta, anomenada *generatriu*, que es mou paral·lelament a e, tot recoltzant-se sobre C. Aquesta superfície es parametritza a partir d'una parametrització de la corba directriu.

Per exemple, el cilindre circular recte d'eix Oz té equació implícita

$$x^2 + y^2 = r^2$$

i es pot parametritzar així:

$$\left.\begin{array}{l} x(\theta, z) = r\cos\theta \\ y(\theta, z) = r\sin\theta \\ z(\theta, z) = z \end{array}\right\} \qquad \text{on } \theta \in [0, 2\pi],\ z \in \mathbb{R}.$$

Esfera

L'esfera de *centre* $C = (a, b, c)$ i *radi* r és el lloc geomètric de tots els punts de l'espai que disten r de C. Té equació implícita

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

i es pot parametritzar així:

$$\left.\begin{array}{l} x(\theta, \varphi) = a + r\cos\varphi\cos\theta \\ y(\theta, \varphi) = b + r\cos\varphi\sin\theta \\ z(\theta, \varphi) = c + r\sin\varphi \end{array}\right\} \qquad \text{on } \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Con

El con circular recte de *vèrtex* V, *eix* e (que passa per V) i *angle de semiobertura* α és la superfície generada per totes les rectes que passen per V i formen angle α amb e.

Per exemple, el con circular recte de vèrtex O, eix Oz i angle de semiobertura α té equació implícita

$$x^2 + y^2 = z^2\tan^2\alpha$$

i es pot parametritzar així:

$$\left.\begin{array}{l} x(\theta, z) = z\tan\alpha\cos\theta \\ y(\theta, z) = z\tan\alpha\sin\theta \\ z(\theta, z) = z \end{array}\right\} \qquad \text{on } \theta \in [0, 2\pi],\ z \in \mathbb{R}.$$

Tor

El tor de *centre* C, *eix* e (que passa per C) i *radis* R i r (amb $R > r$) és la superfície generada per la revolució al voltant de e d'una circumferència coplanària amb e, amb radi r, centrada en un punt que dista R de C. El pla que passa pel centre C del tor i és perpendicular al seu eix e s'anomena *pla diametral* del tor.

El tor de centre O, eix Oz i radis R i r es pot parametritzar així:

$$\left.\begin{array}{l} x(t,s) = (R + r\cos t)\cos s \\ y(t,s) = (R + r\cos t)\sin s \\ z(t,s) = r\sin t \end{array}\right\} \qquad \text{on } t, s \in [0, 2\pi].$$

Superfícies de revolució

S'anomena de revolució la superfície generada per una corba (anomenada *generatriu*) que gira al voltant una recta fixa (anomenada *eix*). Les interseccions de la superfície amb els plans perpendiculars a l'eix són circumferències, anomenades *paral·lels*, i les interseccions amb plans que contenen l'eix són corbes generatrius, anomenades *meridians*.

La parametrització d'una superfície de revolució s'obté a partir de la parametrització de la seva corba generatriu. Per exemple, si fem girar la corba del pla xz

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(t) \\ y = 0 \\ z = f_2(t) \end{array}\right\} \qquad \text{on } t \in [t_1, t_2]$$

al voltant de l'eix Oz, obtenim la superfície

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(t)\cos\theta \\ y = f_1(t)\sin\theta \\ z = f_2(t) \end{array}\right\} \qquad \text{on } t \in [t_1, t_2],\ \theta \in [0, 2\pi].$$

8.4 Exercicis

67 Els punts següents es donen en coordenades cartesianes. Expresseu-los en coordenades cilíndriques i en coordenades esfèriques: $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,0)$, $(1,-1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,0)$, $(-1,1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,0)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,-1,-1)$, $(2,2,0)$, $(2,2,2)$.

68 Parametritzeu el cilindre d'eix Oz que té per directriu la cardioide d'equació polar $r = 3(1+\cos\theta)$ del pla xy. I si l'eix és Oy i la cardioide es pren al pla xz?

69 Parametritzeu un cilindre circular recte de radi 4 i altura h situat sobre el baricentre del triangle de vèrtexs $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$, de forma perpendicular al triangle.

70 Quina modificació de la parametrització de l'esfera dóna lloc a la parametrització d'un el·lipsoide? I si es tracta d'un el·lipsoide de revolució (pilota de rugby)?

71 Quina modificació de la parametrització del tor permet parametritzar la closca d'un cargol?

72 Parametritzeu la superfície generada per una paràbola en girar al voltant del seu eix. La superfície resultant s'anomena paraboloide, i s'utilitza molt en les comunicacions (antenes parabòliques).

73 Parametritzeu la superfície generada per una hipèrbola en girar al voltant d'un dels seus eixos, concretament el que no la talla. La superfície resultant s'anomena hiperboloide, i s'utilitza força a la construcció (torres de refrigeració).

74 Quina superfície de revolució genera una recta en girar al voltant d'una altra?

75 Parametritzeu la superfície de revolució generada per la recta d'equació $2x - y + z = 1$, $x + y - 3z = 2$ en girar al voltant de l'eix Oz.

9 Perspectiva

9.1 Perspectiva cilíndrica

Per tal de representar objectes en perspectiva cilíndrica cal escollir:

- un pla de projecció π,
- una direcció de projecció $\vec{u}$, no paral·lela a π.

Llavors, una projecció paral·lela farà correspondre a cada punt $P = (x, y, z)$ un punt $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tal que $\overline{P} = \pi \cap r$, on $r : X = P + \lambda\vec{u}$.

Quan $\vec{u}$ i π són perpendiculars, es diu que la perspectiva utilitza el *sistema càmera.*

La direcció de projecció es sol donar en coordenades polars:

$$\vec{u} = (\rho \cos\varphi \cos\theta, \rho \cos\varphi \sin\theta, \rho \sin\varphi).$$

En el sistema càmera, les equacions de la perspectiva cilíndrica de direcció $\vec{u}$ són, amb independència de la posició del pla π:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= -x \sin\theta + y \cos\theta, \\
\overline{y} &= -x \sin\varphi \cos\theta - y \sin\varphi \sin\theta + z \cos\varphi.
\end{aligned}$$

9.2 Perspectiva cònica

Per tal de representar objectes en perspectiva cònica cal escollir:

- un pla de projecció π,
- un centre de projecció o punt de vista, C, que no pertanyi a π.

Llavors, una projecció central farà correspondre a cada punt $P = (x, y, z)$ un punt $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tal que $\overline{P} = \pi \cap r$, on $r : X = C + \lambda(P - C)$. Els punts situats al pla que passa per C i és paral·lel a π no es poden representar.

Es sol considerar que l'escena a representar es troba a l'entorn de l'origen. Per això, la recta OC s'anomena *visual principal.* Quan OC i π són perpendiculars, es diu que la perspectiva utilitza el *sistema càmera.*

Per tal d'obtenir les equacions de la perspectiva cilíndrica en el sistema càmera, es solen utilitzar les dades següents:

- coordenades esfèriques del punt de vista:

$$C = (\rho \cos\varphi \cos\theta, \rho \cos\varphi \sin\theta, \rho \sin\varphi),$$

- distància, D, del punt de vista C al pla de projecció π.

Llavors, les equacions de la perspectiva són:

$$\overline{x} = -D\frac{-x\sin\theta + y\cos\theta}{x\cos\varphi\cos\theta + y\cos\varphi\sin\theta + z\sin\varphi - \rho},$$

$$\overline{y} = -D\frac{-x\sin\varphi\cos\theta - y\sin\varphi\sin\theta + z\cos\varphi}{x\cos\varphi\cos\theta + y\cos\varphi\sin\theta + z\sin\varphi - \rho}.$$

A les equacions s'observa que el paràmetre D és un factor multiplicatiu que afecta uniformement la x i la y, mentre que el paràmetre ρ actúa com a deformador de l'objecte. A més, les equacions de la perspectiva cònica es converteixen en les de la perspectiva cilíndrica, quan el punt de vista es porta a l'infinit. Finalment, s'observa que la perspectiva cònica no és una afinitat, com la cilíndrica, sinó una projectivitat.

9.3 Ocultació de parts no visibles

Ens limitarem a exposar un mètode d'ocultació de parts no visibles per al cas d'un únic objecte polièdric convex.

Un vèrtex és visible si, i només si, pertany a alguna aresta visible.

Una aresta és visible si, i només si, pertany a alguna cara visible.

Una cara és visible si, i només si, el vector normal exterior a la cara, $\vec{N}$, forma un angle α amb la direcció de projecció $\vec{u}$ tal que $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, és a dir, si $\vec{N} \cdot \vec{u} > 0$. Noteu que, en el cas de la projecció cilíndrica, $\vec{u}$ és qualsevol vector de la forma $\overrightarrow{XC}$, on X és un punt de la cara.