

Diagramas de Voronoi con funciones temporales *

Ferran Hurtado, Belén Palop, Vera Sacristán
Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtica Aplicada II
Pau Gargallo, 5
08028 BARCELONA

Resumen

Los *diagramas de Voronoi* son teselaciones del plano basadas en el concepto de distancia. Numerosos autores han trabajado en el estudio de estos diagramas tanto para la métrica euclídea como para otras métricas. En este trabajo se describen los diagramas de Voronoi dados por funciones temporales surgidas al introducir en el plano una red de transporte. Dichas funciones pueden dar lugar a bisectores que no forman un arreglo de curvas simples en el plano, por lo que trabajamos con el concepto de diagrama de Voronoi generalizado.

Palabras Clave: Diagrama de Voronoi, red de transporte, métrica temporal.

1 Introducción

Los *diagramas de Voronoi* son teselaciones del plano basadas en el concepto de distancia. Numerosos autores han trabajado en el estudio de estos diagramas para la métrica euclídea [7], así como para el resto de métricas de Minkowski y para la métrica de Moscú, por citar algunas (véase e. g. [4], [1]). No todas las métricas son fácilmente tratables para el cálculo de los diagramas de Voronoi. En 1989, Klein [4] introduce una generalización del concepto de diagrama de Voronoi por medio de los *diagramas de Voronoi abstractos*, que no se basan en el concepto de distancia, sino en el de bisector. Klein parte de un arreglo de curvas simples que bisectan el plano en dos regiones no acotadas y determina cuándo un arreglo es admisible y, por lo tanto, da lugar a un diagrama de Voronoi abstracto con buenas propiedades. Dada una métrica en el plano, el diagrama de Voronoi abstracto determinado por una nube de puntos se obtiene tomando como curvas del arreglo los bisectores determinados por cada par de puntos de la nube.

En 1992, Okabe, Boots y Sugihara [6] dan también un paso en este proceso de abstracción e introducen los *diagramas de Voronoi generalizados*. En lugar de métricas o curvas

*Trabajo parcialmente financiado por *SEUI-PB96-0005-C02-02*.

bisectoras, los autores utilizan una función de asignación para construir la teselación del plano. Cuando se trata de construir el diagrama de Voronoi generalizado de un conjunto finito $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ de puntos en el plano, dicha función es una aplicación δ que a cada punto de \mathbb{R}^2 le hace corresponder un subconjunto no vacío de S . La región de Voronoi asignada por δ a $s \in S$ es el conjunto

$$R_\delta(s) = \{P \in \mathbb{R}^2 : s \in \delta(P)\}$$

y el diagrama de Voronoi generalizado de S respecto a δ es

$$\mathcal{V}(S, \delta) = \{R_\delta(s_1), \dots, R_\delta(s_n)\}.$$

Una función de asignación es admisible cuando la intersección de dos regiones de puntos de S es una curva o bien es vacía.

En este trabajo se calculan los diagramas de Voronoi generalizados cuando la función de asignación viene determinada a partir de una *función temporal*. Concretamente, supongamos dado un arreglo de curvas al que llamamos *red de transporte*, dentro de la cual los desplazamientos se realizan en todas direcciones a velocidad mayor que 1, mientras que la velocidad de desplazamiento fuera de la red es 1. Se estudian también las propiedades de estos diagramas de Voronoi, y su relación con problemas con los que, en la métrica euclídea, han demostrado estar fuertemente vinculados como, por ejemplo, la envolvente convexa.

Dados dos puntos cualesquiera P y Q , denotamos por Γ_{PQ} al conjunto de todos los caminos posibles entre P y Q . Llamaremos $t : \Gamma_{PQ} \rightarrow \mathbb{R}^+$ a la función que a cada camino $\gamma \in \Gamma_{PQ}$ le hace corresponder el tiempo que se tarda en recorrer dicho camino. Denominamos *camino mínimo (temporal)* entre P y Q a cualquier camino que minimiza la función t sobre Γ_{PQ} . Así, la función temporal d_t se define como la que asigna a cada par de puntos el valor de t sobre un camino mínimo entre ambos. Denominaremos *distancia temporal* a dicha función d_t aunque, dependiendo del modelo de transporte utilizado, no siempre sea una distancia.

Numerosos problemas se pueden considerar con las definiciones anteriores según sean las características de la red de transporte. En este trabajo estudiamos dos modelos caracterizados por el modo de acceso a la red. En el *modelo continuo* los accesos se pueden hacer por cualquier punto de la misma, mientras que en el *modelo discreto* se accede por un número finito de puntos a los que denominamos *estaciones*. Nuestro objetivo principal es la generación de algoritmos eficientes para el cálculo de los diagramas de Voronoi generalizados determinados por la distancia temporal. La función de asignación δ para estos diagramas viene dada por la igualdad

$$\delta(P) = \{s \in S : d_t(P, s) \leq d_t(P, s') \text{ para todo } s' \in S\}, \text{ para cada } P \in \mathbb{R}^2.$$

2 Modelo continuo

La red de transporte en el modelo continuo consiste, en general, en un arreglo de curvas en las que los desplazamientos se realizan a velocidad constante y en ambas direcciones dentro de cada una de ellas. Dicha velocidad puede ser diferente para cada una de las curvas. En

este caso, el cálculo del bisector entre dos puntos es un problema difícil de abordar. De hecho, el problema subyacente de la obtención de un camino mínimo entre dos puntos es ya bastante complejo (véase [5]).

Abordaremos el problema suponiendo que la red de transporte se reduce a una única línea recta, que denotaremos por L , con velocidad de desplazamiento constante $v > 1$ en ambos sentidos. Como se dijo anteriormente, la velocidad fuera de la red es 1. Sin pérdida de generalidad, consideraremos la recta L situada sobre el eje de abscisas. Llamamos *modelo continuo simple* a este modelo.

Distancia temporal y diagrama de Voronoi

Denotamos por d_e la distancia euclídea en el plano. La función distancia temporal en el modelo continuo simple, que indicaremos por d_t^L , viene dada por el siguiente lema.

Lema 1 *Dados dos puntos cualesquiera $P = (P_x, P_y)$ y $Q = (Q_x, Q_y)$ del plano,*

$$d_t^L(P, Q) = \min\{d_e(P, Q), \frac{1}{v} |Q_x - P_x| + \frac{\sqrt{v^2 - 1}}{v} (|P_y| + |Q_y|)\}.$$

Demostración. Sea γ_{PQ} un camino mínimo entre P y Q . Sabemos que $d_t^L(P, Q)$ es igual a $t(\gamma_{PQ})$, el tiempo que se invierte en recorrer γ_{PQ} . Si dicho camino no utiliza la red de transporte, entonces $d_t^L(P, Q) = d_e(P, Q)$, puesto que la velocidad de desplazamiento fuera de la red es 1. Supongamos que γ_{PQ} usa la red de transporte. Sea P' (resp. Q') el punto de intersección de la recta que pasa por P (resp. Q) y forma un ángulo α (resp. $-\alpha$) con la perpendicular a la línea de transporte, donde $\sin \alpha = 1/v$. Entonces, por la ley de la refracción, γ_{PQ} está compuesto por los segmentos PP' , $P'Q'$ y $Q'Q$. Por lo tanto, en este caso,

$$t(\gamma_{PQ}) = d_e(P, P') + \frac{1}{v} d_e(P', Q') + d_e(Q', Q). \quad \square$$

Esta distancia temporal da lugar a una métrica del plano que verifica ciertas propiedades que permiten calcular los diagramas de Voronoi abstractos de forma eficiente.

Definición 2 (Klein y Wood) *Si d es una métrica en el plano, decimos que es una métrica agradable (nice metric) cuando cumple las siguientes propiedades:*

- d induce la topología euclídea;
- las d -bolas son acotadas respecto a la distancia euclídea;
- dados dos puntos distintos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, existe un punto $R \notin \{P, Q\}$ tal que $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$;
- si $P, Q \in \mathbb{R}^2$ y $P \prec Q$ según el orden lexicográfico, entonces $B(P, Q) = C(P, Q) \cap \overline{D(Q, P)}$ es una curva homeomorfa a $(0, 1)$, donde

$$C(P, Q) = \{R \in \mathbb{R}^2 : d(P, R) \leq d(Q, R)\},$$

$$D(P, Q) = \{R \in \mathbb{R}^2 : d(P, R) < d(Q, R)\};$$

- si $P, P', Q, Q' \in \mathbb{R}^2$ entonces la intersección entre $B(P, Q)$ y $B(P', Q')$ tiene un número finito de componentes conexas.

Teorema 3 La distancia temporal d_t^L es una métrica agradable.

La demostración de este teorema (que no reproduciremos con detalle aquí) requiere calcular las bolas unidad para la métrica temporal, así como los bisectores $B(P, Q)$ para cualquier par de puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

La bola unidad tiene formas distintas (véase la Figura 1) dependiendo de si la distancia del punto a la recta L es mayor o igual que uno (punto P), menor que uno pero estrictamente positiva (punto Q) o nula (punto R).

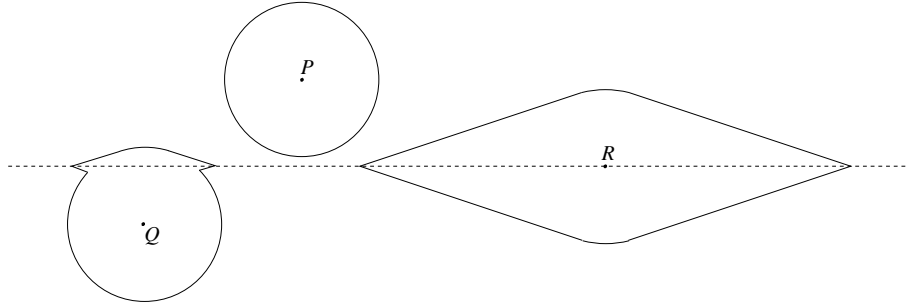


Figura 1: Bolas unidad en la métrica temporal.

Por otra parte, dado un punto $P \in \mathbb{R}^2$, puede determinarse el lugar geométrico de los puntos del plano a los que accede sin utilizar la línea de transporte. Esto permite decidir, para cada punto del plano, cuál es el camino mínimo entre dicho punto y el punto P y, por lo tanto, calcular la distancia temporal entre ambos. Dados dos puntos P y Q , se puede dividir el plano en cuatro regiones, dependiendo del modo de acceso desde P y Q , y calcular analíticamente la porción de bisector incluida en cada región. El resultado es una curva simple formada por una sucesión de arcos de parábola (pertenecientes, como máximo, a seis parábolas diferentes) y de segmentos (como máximo tres) que divergen hacia el infinito en ambos extremos (véase la Figura 2).

Teorema 4 (Dehne y Klein, [2]) El diagrama de Voronoi de una nube de n puntos con una métrica agradable se puede calcular en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$ con un algoritmo de barrido.

Corolario 5 El diagrama de Voronoi de una nube de puntos para el modelo continuo simple se puede calcular en tiempo $O(n \log n)$ y espacio $O(n)$ con un algoritmo de barrido.

Envolvente convexa temporal

En el modelo continuo simple, podemos plantearnos también problemas relacionados con el diagrama de Voronoi como, por ejemplo, el cálculo del diagrama de Voronoi lejano o de la

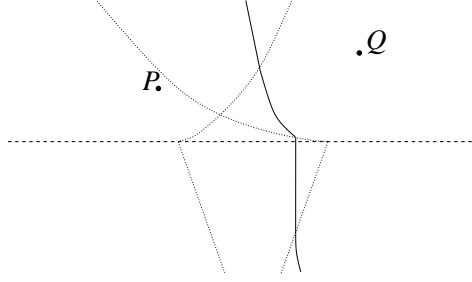


Figura 2: Bisector de los puntos P y Q . Las líneas punteadas delimitan las regiones en que se divide el plano según el modo de acceso de P y de Q .

envolvente convexa temporal de una nube de puntos. Para la métrica euclídea, es sabida la estrecha relación que hay entre ambas estructuras, lo que induce a buscar algún paralelismo para la métrica temporal.

Definición 6 Decimos que un conjunto S es temporalmente convexo si, para todo par de puntos del conjunto, el camino mínimo entre ellos está incluido en S .

Para calcular la envolvente convexa temporal de una nube de puntos se divide ésta en dos subconjuntos dependiendo de su posición respecto a L ; se calcula la envolvente para cada uno de ellos; y se realiza una operación de unión de ambas partes.

Si la nube de puntos S está *suficientemente* alejada de L , la envolvente convexa temporal coincide con la euclídea. Sin embargo, si un camino mínimo entre dos puntos de S corta a L , podemos asegurar que la envolvente convexa temporal está compuesta de, al menos, un polígono convexo con uno de sus lados sobre L . Llamamos *vértice* de la envolvente a cada uno de los vértices de los polígonos que forman la envolvente excepto a aquellos que se encuentran sobre L , a los que denominamos *codos*.

En general, la envolvente convexa temporal de un conjunto finito de puntos consiste en una cadena finita de polígonos convexos unidos entre sí por segmentos de L . Cada uno de estos polígonos tiene uno de sus lados sobre la línea de transporte (véase la Figura 3). En cada codo interior de la cadena (por ejemplo, el punto M de la figura) inciden dos lados de un mismo polígono formando un ángulo $\pi/2 - \alpha$, donde $\sin \alpha = 1/v$. Los lados incidentes a los dos codos exteriores (puntos N y N' de la figura) tienen una inclinación que puede variar entre $+\alpha$ y $-\alpha$ respecto a la dirección perpendicular a L . En algunas ocasiones, el polígono se reduce a un único segmento incidente a un codo exterior (punto N' de la figura).

Teorema 7 La envolvente convexa temporal de una nube de n puntos puede tener como máximo n vértices, $2n$ codos y n polígonos.

Demostración. Es fácil comprobar que todos los vértices de la envolvente son puntos de la nube, por lo que no puede haber más de n . Por otro lado, no puede haber ningún polígono que no contenga vértices y, por lo tanto, el mayor número de polígonos se alcanza cuando

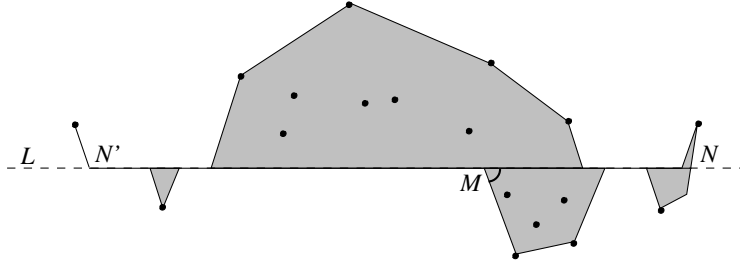


Figura 3: Envoltorio convexo temporal de una nube de puntos.

cada vértice pertenece a un polígono diferente. Por último, como cada polígono de la cadena tiene un lado sobre L , da lugar a dos codos. Cuando en el extremo de una cadena hay un segmento, este añade un único codo. En consecuencia, el número de codos es como máximo $2n$. \square

El ejemplo de la Figura 4 muestra una configuración de n puntos P_1, \dots, P_n en la que cada P_i es un vértice de la envoltorio convexo temporal, y cada polígono tiene un vértice y se apoya en dos codos. Por lo tanto, este es un ejemplo en el que se alcanzan las cotas máximas.

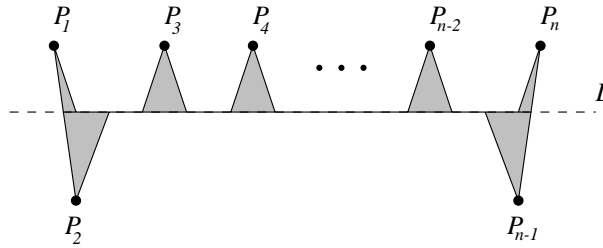


Figura 4: Envoltorio convexo temporal de complejidad máxima.

3 Modelo discreto

En el modelo discreto, asociamos a la red de transporte un grafo ponderado $G = (V, E, w)$, donde V es el conjunto de estaciones de la red, E es el conjunto de conexiones entre ellas y w es la función que a cada arista le asigna el tiempo que se tarda en realizar el desplazamiento entre las estaciones correspondientes. Suponemos también que los desplazamientos fuera de la red se realizan a velocidad constante 1.

Distancia temporal

Dadas dos estaciones $u, v \in V$, sea $d_G(u, v)$ el peso de un camino mínimo entre u y v sobre el grafo G . Nuevamente, denotamos d_e la distancia euclídea sobre el plano. Si imponemos que en cada desplazamiento de un punto a otro del plano se realice, como máximo, un acceso a la red, la función distancia temporal asociada a G , que denotaremos d_t^G , viene dada del siguiente modo.

Lema 8 *Dados dos puntos cualesquiera P y Q del plano,*

$$d_t^G(P, Q) = \min \{d_e(P, Q), \min_{u, v \in V} \{d_e(P, u) + d_G(u, v) + d_e(v, Q)\}\}.$$

Esta función muestra diversas anomalías, razón por la cual, dado un conjunto finito de puntos del plano, no podemos asociarle un diagrama de Voronoi abstracto pero sí, como se verá más adelante, un diagrama de Voronoi generalizado. Dichas anomalías son las siguientes.

- 1.- La función d_t^G no satisface en general la desigualdad triangular. Tomemos un grafo G en el que existen dos estaciones, u y v , tales que $d_e(u, v) < d_G(u, v)$. Sean P y Q dos puntos del plano para los cuales existe un camino mínimo (temporal) C que pasa por u y por v . Supongamos que las estaciones de acceso a la red desde P y Q no son ni u ni v . En este caso, $d_t^G(P, Q) > d_t^G(P, u) + d_t^G(u, Q)$, puesto que el subcamino de C que une los puntos u y Q no es un camino mínimo entre ellos.
- 2.- Dependiendo de las características de la red, puede ocurrir también que el bisector entre dos puntos sea una curva cerrada. Supongamos que G tiene un ciclo y varias estaciones equidistribuidas a lo largo del ciclo. Sea P un punto interior del ciclo y Q un punto cercano a una estación. Si la velocidad de desplazamiento dentro de la red es muy elevada, puede existir una curva cerrada de puntos alrededor de P a la cual los desplazamientos desde Q se realizan más rápido que desde el propio P . El bisector entre P y Q es, por lo tanto, una curva cerrada del interior del ciclo.
- 3.- Por otra parte, el bisector entre dos puntos puede no ser una curva sino incluir una región del plano. Supongamos P y Q dos puntos del plano y v una estación de la red. Supongamos también que tanto P como Q acceden a v por medio de dos caminos disjuntos que utilizan la red. Si $d_t^G(P, v) = d_t^G(Q, v)$, entonces existe una bola abierta de centro v cuyos puntos acceden a P y a Q pasando por v . Todos los puntos de esta bola están a igual distancia de P que de Q .

Las dos primeras anomalías, hacen evidente que la función temporal no es una métrica agradable (de hecho, no es ni tan solo una métrica). Para resolver el tercer problema, sin embargo, se puede utilizar la misma idea que Lee [3] emplea para la métrica L_1 . Es decir, se establece un orden \prec sobre el plano de modo que si el bisector $B(P, Q)$ incluye una región y $P \prec Q$, entonces el interior de la región se asigna al punto P . Esto permite definir el diagrama de Voronoi de una nube de puntos S para la distancia temporal d_t^G como el diagrama de Voronoi generalizado con la siguiente función de asignación:

$$\delta_t^G(P) = \min_{\prec} \{s \in S : d_t^G(P, s) \leq d_t^G(P, s') \text{ para todo } s' \in S\}, \text{ para cada } P \in \mathbb{R}^2.$$

Proponemos ahora una ligera modificación del modelo: En cada desplazamiento de un punto a otro del plano admitimos más de un acceso a la red. En este caso, tenemos que

si las estaciones u y v pertenecen a un camino mínimo entre P y Q que usa la red y $d_e(u, v) < d_G(u, v)$, entonces el desplazamiento de P a Q consta, al menos, de dos entradas a la red. La forma más sencilla de tratar este problema es definir un nuevo grafo G^* que se obtiene al añadir a G la arista uv para cada $u, v \in V$ tales que $d_e(u, v) < d_G(u, v)$. Así logramos que la función distancia temporal correspondiente a G^* , definida como en el lema 8, verifique las propiedades de distancia.

Con la función $d_t^{G^*}$ el bisector entre dos puntos puede también ser una curva cerrada. Por lo tanto, aunque sea una distancia, la métrica no es *agradable* y el diagrama de Voronoi asociado tampoco se incluye en los diagramas de Voronoi abstractos pero sí en los generalizados.

Cálculo del diagrama de Voronoi

En este apartado se detalla cómo calcular el diagrama de Voronoi para cada uno de los dos modelos del apartado anterior. Sean S una nube de puntos y $G = (V, E, w)$ el grafo asociado a la red en alguno de los dos modelos. La región de Voronoi de un punto $P \in S$ es el lugar geométrico de los puntos desde los que se accede a P antes que a cualquier otro punto de S . Este diagrama de Voronoi se puede obtener a partir de cierto diagrama de Voronoi con pesos aditivos de $S \cup V$ en el que a cada estación se le asocia un peso que depende de su distancia temporal al punto de S más cercano (véase la Figura 5).

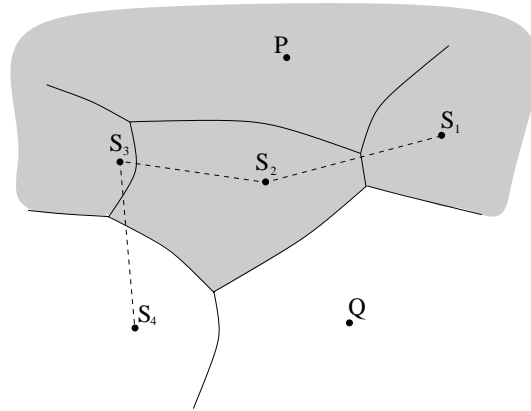


Figura 5: Diagrama de Voronoi de P y Q en presencia de la red $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Las estaciones S_1, S_2 y S_3 están más cerca de P que de Q y sus regiones (aditivas) pertenecen a la región (temporal) del punto P .

Concretamente, el diagrama de Voronoi con la función temporal d_t^G se puede calcular como sigue.

- 1.- Asociar a cada estación $v \in V$, el par $\{s_v, t_v\}$, donde $s_v = \delta_t^G(v)$ y $t_v = d_t^G(v, s_v)$:

Se construye el diagrama de Voronoi euclídeo de S . A cada estación $v \in V$ se le asocian dos atributos: el punto $s = \delta_e(v)$ y el valor $t = d_e(P, v)$, donde δ_e es la función de asignación para la distancia euclídea. Sea L_V la lista de todas las ternas $\{v, s, t\}$. Aplicando a continuación el algoritmo de Dijkstra para cada $v \in V$ con entradas L_V y G , se obtienen $s_v = \delta_t^G(v)$ y $t_v = d_t^G(v, s_v)$. Si en este paso hay dos puntos s_i y s_j tales que $\delta_t^G(v) = \{s_i, s_j\}$, asignamos a s_v el lexicográficamente más pequeño de los dos.

2.- *Calcular el diagrama de Voronoi aditivo \mathcal{V} del conjunto $S \cup V$:*

A cada estación $v \in V$ se le asigna el peso $-t_v$ y a cada punto $s \in S$, peso 0. Llamaremos $R_V(P)$ a la región de Voronoi del punto $P \in S \cup V$ en el diagrama de Voronoi con pesos aditivos \mathcal{V} .

3.- *Determinar la región de Voronoi de cada punto de la nube:*

Dado un punto $s \in S$, sea $C_s = \{v \in V : \delta_t^G(v) = s\}$. La región de Voronoi de s es

$$R(s) = R_V(s) \cup \left(\bigcup_{v \in C_s} R_V(v) \right).$$

Teorema 9 *Dado un grafo $G = (V, E, w)$, el algoritmo anterior calcula el diagrama de Voronoi de una nube de n puntos en tiempo $O(n \log n)$.*

Demostración. Se omite aquí la demostración de la corrección del algoritmo. En cuanto a su complejidad, sea $m = |V|$. Todas las operaciones del primer paso se pueden realizar en tiempo $O((n + m) \log n) + O(m^2 \log m)$. Por otra parte, la generación del diagrama de Voronoi aditivo tiene un coste de $O((n + m) \log(n + m))$. Por último, la determinación de las regiones de Voronoi de los puntos de la nube se realiza en tiempo $O(n + m)$. La complejidad total del algoritmo es, por lo tanto, $O((n + m) \log(n + m) + m^2 \log m)$. Así, fijado el grafo, podemos considerar m constante y obtener la complejidad en términos del tamaño del conjunto S . \square

Referencias

- [1] L. P. Chew, R.L. Drysdale, III. *Voronoi diagrams based on convex distance functions*, Proceedings 1st SCM Symposium on Computational Geometry, págs. 235-244, 1995.
- [2] F. Dehne, R. Klein, “*The big sweep*”: *On the power of the wavefront approach to Voronoi diagrams*, Algorithmica, Vol. 17, N.1, págs. 19-32, 1997.
- [3] D. T. Lee, C. K. Wong, *Voronoi diagrams in L_1 (L_∞) metrics with 2-dimensional storage applications*, SIAM Journal on computing, Vol. 9, págs. 200-211, 1980.
- [4] R. Klein, *Concrete and abstract Voronoi Diagrams*, Springer Verlag, 1989.
- [5] L. Gewali, A. Meng, J. S. B. Mitchell, S. Ntafos, *Path planning in 0/1/ ∞ weighted regions with applications*, ORSA J. Comput., Vol. 2, N. 3, págs. 253-272, 1990.
- [6] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, *Spatial tessellations: Concepts and applications of Voronoi Diagrams*, John Wiley & Sons, 1992.
- [7] M. I. Shamos, D. Hoey, *Closest-point problems*, Proceedings 16th IEEE Symposium on foundations of Computer Science, págs. 151- 162, 1975.