

Ángulo de apertura en la visión en dos y tres dimensiones

Ferran Hurtado¹

Vera Sacristán¹

Godfried Toussaint²

Resumen

Presentamos la solución de algunos problemas de decisión y optimización del ángulo de apertura, tanto en la visión de objetos como en la visión a través de obstáculos, en dos y tres dimensiones. El concepto de ángulo de visión de y a través de objetos poligonales ha sido estudiado por Bose et al. y por Hurtado en [4, 7, 8], trabajos en que los autores resuelven diversos problemas de optimización cuando el punto de vista se encuentra situado en determinadas trayectorias o regiones del plano.

En este artículo, extendemos sus resultados en tres direcciones distintas. En primer lugar, resolvemos problemas análogos en el caso en que tanto los objetos a visualizar como los obstáculos a la visión están definidos por intersección, posiblemente redundante, de semiplanos, a la vez que el punto de vista satisface determinado conjunto de restricciones lineales. En segundo lugar, consideramos la cuestión de la optimización del ángulo de apertura para la visión simultánea de diversos objetos o a través de varios obstáculos. Finalmente, proponemos una medida, extensión de la del plano, para el ángulo de visión tridimensional, y con ella estudiamos problemas de visualización de objetos tridimensionales desde distintas posiciones en el espacio.

Palabras clave: visibilidad, optimización, poda y búsqueda.

1 Introducción

Tradicionalmente, en los problemas de galerías de arte, o de visibilidad en general, se daba por hecho que los guardias, cámaras u otro tipo de puntos de vista eran capaces de mirar en todas direcciones. Dicho de otro modo, que su ángulo de apertura era de 360° . Este planteamiento ideal ha ido dando paso a la investigación de modelos más realistas de visibilidad, en los cuales el campo de visión está acotado por algún valor positivo y menor que 360° . Sin ánimo de exhaustividad, puede decirse, por ejemplo, que [1, 3] son muestras representativas de las direcciones de trabajo en este campo. En el primero de estos artículos, Avis et al. plantean el problema en términos de visibilidad, y presentan algoritmos óptimos para hallar todos los puntos de un conjunto dado que son capaces de ver libremente, según un determinado ángulo de apertura, a través de los obstáculos representados por los restantes puntos. En el segundo, que plantea el tema en términos de iluminación, Bose et al. resuelven el problema de situar n focos con ángulos de apertura especificados en n puntos del plano dados, de manera que el plano entero quede iluminado.

Los problemas que se resuelven en este artículo están directamente relacionados con los problemas planteados por Bose et al. y Hurtado en [4, 7, 8], en los que lo que se pretende

¹Dep. Matemàtica Aplicada II. Universitat Politècnica de Catalunya. Pau Gargallo 5. 08028 Barcelona. Tel.: (93)4016926. Fax: (93)4017284. E-mail: hurtado@ma2.upc.es, vera@ma2.upc.es. Investigación parcialmente subvencionada por el proyecto UPC-PR9410.

²School of Computer Science, McGill University, 3480 University, Montréal, Québec, Canada H3A 2A7. Tel.: +1.514.3987077. Fax: +1.514.3983883. E-mail: godfried@cs.mcgill.ca.

no es ya iluminar/visualizar objetos mediante focos/cámaras con ángulo de apertura fijo o acotado, sino maximizar el ángulo de visión (por ejemplo, a través de obstáculos) situando adecuadamente el punto de vista.

En la Sección 2 se ofrece una muestra de cómo pueden abordarse los problemas de visión de polígonos a través de obstáculos en el plano desde distintas trayectorias, en el caso en que tanto los objetos a visualizar como los obstáculos vienen dados por intersección de semiplanos. Los puntos de vista podrán estar situados sobre rectas o segmentos, o también satisfacer determinadas restricciones lineales. Esta sección puede considerarse como una pequeña muestra del trabajo recogido en [10, 9, 15]. En la primera de las referencias mencionadas se recogen resultados relativos a problemas de localización de servicios, y en la segunda se estudia con detalle la técnica de poda y búsqueda con oráculo basado en el cálculo de medianas y la resolución de problemas de programación lineal, para la resolución de problemas geométricos generales, mientras que en la tercera se abordan diversas cuestiones de optimización en visibilidad, en particular las referidas al ángulo de apertura. Aquí ofrecemos un ejemplo, estrictamente de visibilidad y, más particularmente, de optimización del ángulo de visión, en que se aplican las técnicas desarrolladas con detalle en las referencias citadas.

En la Sección 3 se estudia un problema análogo a los citados de [4, 7, 8], pero ahora referido a la visión simultánea de diversos objetos. Se trata, pues, no ya de ver un único objeto a través ciertos obstáculos desde una trayectoria dada, sino de ver diversos objetos a la vez, y de la mejor forma posible. Para definir este último concepto, se ha optado por considerar que la magnitud a optimizar es el menor de los ángulos con que se ve cada uno de los objetos. El criterio es, pues, el de ver tan bien como se pueda el objeto que se ve peor. El ejemplo que se propone (muchos otros pueden consultarse en [15]) es representativo de las técnicas y de los resultados obtenidos, el más relevante de los cuales es que la complejidad del problema de optimización del ángulo de visión simultánea de dos objetos/huecos poligonales coincide con la complejidad del problema para uno sólo.

Finalmente, la Sección 4 recoge un resultado de lo que puede considerarse como una generalización tridimensional de los problemas de [4, 7, 8]. De hecho, en [12] pueden encontrarse unos primeros resultados en tres dimensiones. Sin embargo, allí se estudia un ángulo de visión que podríamos considerar de dimensión $2\frac{1}{2}$, en el sentido de que, a pesar de que tanto los puntos de vista como los objetos a visualizar están situados en el espacio tridimensional, estos últimos siempre son segmentos, de forma que el ángulo de visión considerado es siempre plano. Aquí estudiamos objetos de visión tridimensionales, de manera que la magnitud a considerar es el ángulo, propiamente tridimensional, con que el punto de vista abarca un tal objeto. Otros varios resultados pueden consultarse en [15].

Puesto que los tres problemas que exponemos tienen un sustrato común inequívoco, la optimización del ángulo de apertura o de visión, comenzamos planteando la cuestión en términos generales. Los problemas que nos interesan son de decisión:

Problema 1 Sean P, Q_1, \dots, Q_k objetos geométricos disjuntos en el plano, y T un conjunto de puntos (en general, algún tipo de curva). ¿Es posible ver el objeto P desde algún punto de la trayectoria T sin que se produzca oclusión por alguno de los obstáculos Q_1, \dots, Q_k ?

O bien de optimización:

Problema 2 Sean P, Q_1, \dots, Q_k objetos geométricos disjuntos en el plano, y T un conjunto de puntos (en general, algún tipo de curva). ¿Qué punto(s) de la trayectoria T

permite(n) ver el objeto P con ángulo de apertura máximo, sin que se produzca oclusión por alguno de los obstáculos Q_1, \dots, Q_k ?

Para empezar, es necesario precisar los conceptos que aparecen en los anteriores enunciados. Cuando nos refiramos a la envolvente convexa de un conjunto X , escribiremos $\text{conv}(X)$.

Definición 3 Sean P, Q_1, \dots, Q_k objetos geométricos disjuntos en el plano, y T un conjunto de puntos. Se dice que P es visible desde un punto $v \in T$ si $v \notin \text{conv}(P)$ y ningún punto de $T \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ pertenece al interior de $\text{conv}(P \cup \{v\}) \setminus \text{conv}(P)$ (Figura 1).

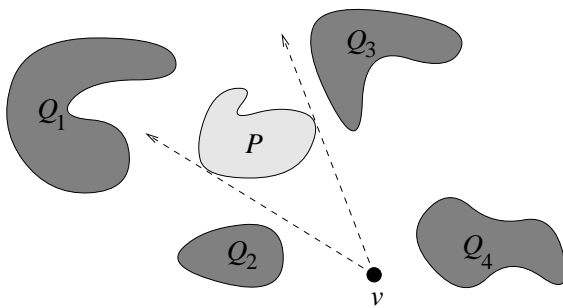


Figura 1: El objeto P es visible desde el punto v .

Intuitivamente, v ve P libre de obstáculos si ninguna línea de visión de v a P es interceptada por un obstáculo Q_i o por el mismo T . Ocupémonos, ahora, supuesto que v ve P , del ángulo con que lo ve.

Definición 4 Un punto v ve un objeto P según un ángulo α si las dos semirrectas con origen en v tangentes a P forman un ángulo de medida α (Figura 2).

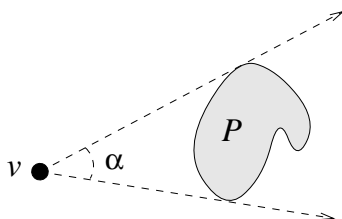


Figura 2: El ángulo α con que v ve P .

Las definiciones anteriores se refieren a la visión de objetos, pero también nos interesa estudiar la visión a través de obstáculos.

Definición 5 Dado un punto de vista v y dos objetos de envolventes convexas disjuntas, Q y R , tales que $v \notin \text{conv}(Q \cup R)$, se dice que v puede ver a través del hueco entre Q y R si es posible trazar una recta por el punto v que separe los objetos Q y R (Figura 3).

Supuesto que v ve a través de Q y R , el ángulo con que lo hace se define a continuación.

Definición 6 El ángulo con que un punto v ve a través del hueco entre dos obstáculos Q y R se define como el ángulo que forman las dos semirrectas de soporte con origen en v , la una tangente a Q y la otra a R , que separan Q de R (Figura 4).

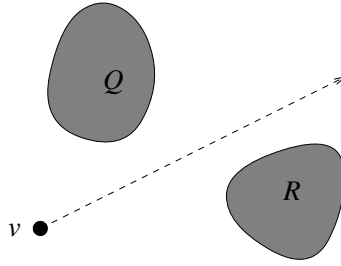


Figura 3: El punto v ve a través del hueco entre los obstáculos Q y R .

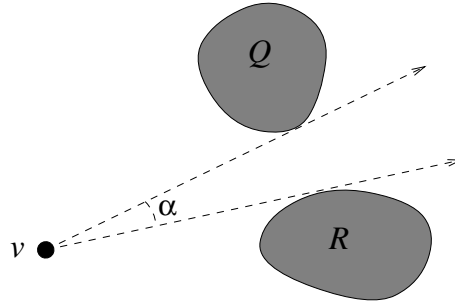


Figura 4: El ángulo α con que el punto v ve a través del hueco entre los obstáculos Q y R .

2 Problemas planos de optimización del ángulo de visión con restricciones lineales

Un polígono convexo puede venir dado por una lista ordenada de vértices o, implícitamente, por intersección de un conjunto de semiplanos. Esta segunda posibilidad modeliza mucho más adecuadamente gran cantidad de problemas reales, en los que intervienen restricciones lineales que limitan la libertad de la solución del problema. En este caso, siempre es posible “construir” el polígono, es decir, obtener la lista ordenada de sus vértices a partir del conjunto de semiplanos que lo definen, en tiempo $\Omega(n \log n)$, para luego extraer propiedades o efectuar construcciones. La cuestión es qué puede hacerse sin necesidad de construir el polígono, qué problemas pueden resolverse en tiempo óptimo $\Theta(n)$.

Dado un conjunto $H = \{H_1, \dots, H_n\}$ de semiplanos, determinados por rectas orientadas h_1, \dots, h_n , de manera que $H_i = h_i^{\text{izq}}$, $\forall i = 1, \dots, n$, se considera el polígono $P(H) = \bigcap_{i=1}^n H_i$. Se trata de responder a preguntas del tipo ¿cuál es el ángulo de apertura con que un punto v ve $P(H)$? ¿qué punto de $P(H)$ optimiza la visión a través de los obstáculos $P(H')$ y $P(H'')$?. Algunos de los problemas de este tipo pueden resolverse en tiempo óptimo, $\Theta(n)$, mientras que otros requieren tiempo $\Omega(n \log n)$.

La mayor parte de los algoritmos que resuelven estos problemas positivamente siguen el esquema de poda y búsqueda. Un oráculo permite descartar una fracción constante de los hiperplanos H_i (y, en su caso, de los restantes elementos del *input*) en tiempo lineal en el número de éstos. Aplicado reiteradamente, el algoritmo acaba encontrando la solución al problema en tiempo lineal. El oráculo, en la mayoría de los casos, se basa en la solución de un problema de programación lineal en una dirección adecuada para la posterior eliminación de suficientes elementos del *input*, dirección que suele hallarse a través del cálculo de una mediana, que puede realizarse en tiempo lineal, mediante cualquiera de los algoritmos conocidos [2, 5]. En cuanto al algoritmo de programación

lineal, pueden aplicarse los algoritmos de [11, 16]. Sin embargo, puesto que el algoritmo de Megiddo para programación lineal no requiere, a su vez, más que el cálculo de medianas, parece interesante ofrecer, en los casos en que es posible, un algoritmo modificado, en que el oráculo sólo depende de un algoritmo de cálculo de la mediana de un conjunto de valores.

La solución del problema de maximización del ángulo de visión, tanto si se trata de mirar un polígono como si se trata de mirar a través del hueco entre dos obstáculos poligonales, se basa fuertemente en el resultado sobre maximización del ángulo de visión de un segmento [7, 8].

Teorema 7 *El punto del plano que, cumpliendo un conjunto de n restricciones lineales dadas, ve con ángulo de visión máximo un determinado segmento \overline{qr} se puede hallar en tiempo $\Theta(n)$.*

Demostración: En primer lugar, conviene señalar que el problema sólo tiene interés cuando el polígono definido por las restricciones no corta al segmento, pues si lo corta en un punto interior, el ángulo máximo de visión vale π , mientras que si lo corta en un extremo, el ángulo de visión se puede aproximar, tanto como se desee, a la medida del arco capaz de \overline{qr} tangente al polígono.

Supuesto que el polígono T , definido por las restricciones lineales, y el segmento \overline{qr} no se corten, este es un procedimiento posible para hallar el punto de T desde el cual se ve el segmento \overline{qr} con ángulo máximo:

1. Trácese las tangentes comunes interiores a T y \overline{qr} , para determinar la cadena de T visible desde el segmento. Considérense solamente las restricciones correspondientes a la cadena visible, con pendientes comprendidas entre las dos incidentes en las rectas tangentes.
2. Calcúlese la mediana de las pendientes de las restricciones presentes y, por programación lineal, hállese la recta tangente a T con dicha pendiente, y el (un) punto p de tangencia.
3. Si la recta se apoya en un vértice, considérense los dos lados incidentes en él. Si se apoya en un lado, considérese dicho lado. Decídase localmente hacia qué lado de p se encuentra el punto de la cadena de T en que se alcanza el ángulo de visión máximo. Esto puede hacerse en tiempo $O(1)$, estudiando la posición relativa del lado o lados de T incidentes en p y el arco capaz de \overline{qr} que pasa por p (Figura 5). La unimodalidad del ángulo de visión de un segmento desde la cadena visible de un

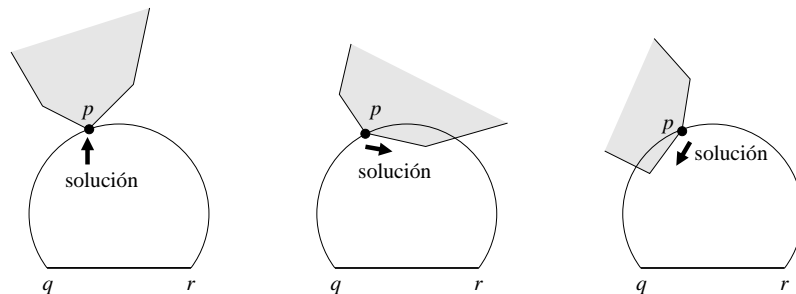


Figura 5: Cómo decidir a qué lado del punto de tangencia se encuentra la solución.

polígono convexo [7, 8] garantiza la corrección del resultado.

4. Según a qué lado se encuentre el óptimo, descártense todos los semiplanos con pendientes superiores o con pendientes inferiores a la mediana, antes de volver a iterar el proceso.

El algoritmo resuelve el problema por aplicación reiterada de un oráculo que, mediante el cálculo de una mediana y la solución de un problema de programación lineal, permite eliminar la mitad de las restricciones presentes. Es, por tanto, un algoritmo lineal. \square

El problema anterior también puede resolverse mediante un algoritmo en que el oráculo no resuelva, a cada iteración, un problema de programación lineal, sino con sólo el cálculo de medianas.

Teorema 8 *El punto del plano que, cumpliendo un conjunto de n restricciones lineales dadas, ve con ángulo de visión máximo un determinado segmento \overline{qr} se puede hallar en tiempo $\Theta(n)$ sin hacer uso de un algoritmo de programación lineal, sino sólo mediante el cálculo de medianas.*

Demostración: Como en el caso anterior, se empieza trazando las tangentes interiores comunes al polígono definido por las restricciones y el segmento, lo cual permite eliminar todas las restricciones cuyas pendientes no estén comprendidas entre las de los dos lados extremos de la cadena de T visible desde el segmento. Sin pérdida de generalidad, puede considerarse que el segmento es horizontal, de forma que todos los semiplanos supervivientes son superiores (o todos inferiores). El proceso a seguir es el siguiente:

1. Se emparejan los semiplanos de dos en dos. Por ser todos superiores, no habrá nunca dos de ellos paralelos sin que uno de los dos sea irrelevante. Por consiguiente, podemos considerar que se pueden emparejar de forma que cada par se corte en un punto c_i .
2. Se calcula la mediana x_m de las abscisas de los puntos c_i y se aplica un oráculo a la recta $x = x_m$ para detectar a qué lado de ésta se encuentra la solución.
3. A continuación se calcula la mediana y_m de las ordenadas de los puntos c_i que se hallan en el semiplano opuesto al de la solución, y se le aplica el oráculo a la recta $y = y_m$.
4. Por cada punto del cuadrante opuesto al de la solución, se puede eliminar al menos uno de los dos semiplanos que lo definen (recuérdese que se trata de semiplanos todos superiores o todos inferiores), por ser irrelevante en el cuadrante que contiene la solución (Figura 6).

Concentrémonos, pues, en el oráculo. Dada una recta, se trata de saber a qué lado de ésta se encuentra el punto del polígono T desde el cual se ve el segmento con ángulo de visión máximo.

- Si la recta no corta al polígono T , la solución se encuentra del mismo lado de ésta que el polígono mismo.
- Si la recta corta al polígono, lo hace en uno o a lo sumo dos puntos. Si el punto de corte es uno, se estudia el problema localmente (distinguiendo si se trata de un vértice o de un punto interior a un lado). Si los puntos de corte son dos, basta con hacer el estudio anterior en uno de los dos. Este estudio local es análogo al que se realizó en el algoritmo del teorema anterior.

\square

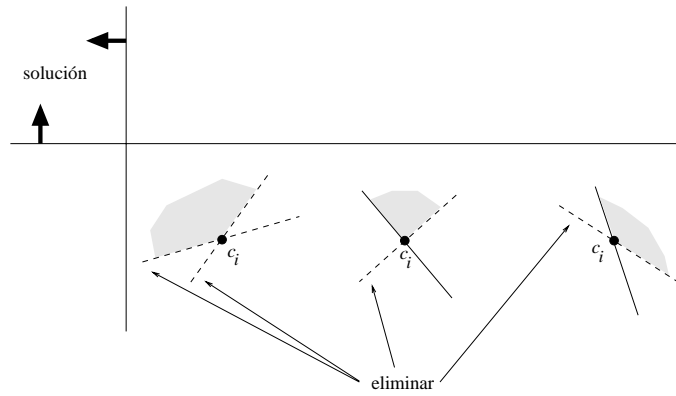


Figura 6: Eliminación de semiplanos. Si la solución se encuentra en el cuadrante superior izquierdo, entonces por cada punto c_i del cuadrante inferior derecho puede(n) eliminarse la(s) restricción(es) de pendiente positiva o, si las dos son de pendiente negativa, la restricción de pendiente mayor.

3 Optimización del ángulo de apertura en el caso de visión simultánea de diversos objetos y obstáculos en el plano

En esta sección se estudia un problema de optimización del ángulo de apertura, tanto en la visión de polígonos como en la visión a través de obstáculos, en el caso en que son más de uno los objetos a visualizar o los huecos a través de los cuales mirar.

Lo más importante que puede decirse sobre los resultados obtenidos en esta línea es que las complejidades de las soluciones obtenidas coinciden con las que se tenían para la visión de un solo objeto, o a través de un solo hueco [4, 8, 15], y esto a pesar de la complicación del problema representada por la necesidad de compaginar la visión de dos objetos o huecos.

Sean P_1 y P_2 dos polígonos convexos disjuntos. Cada punto v del plano ve el polígono P_1 con cierto ángulo de apertura, α_1 , y ve el polígono P_2 con el ángulo de apertura correspondiente, α_2 . Si pensamos en los dos objetos como presentes a la vez en una misma escena, vista desde v , un punto de vista desde el cual la visión simultánea de dos segmentos es óptima debe ser un punto en el que se pueda considerar que ambos se ven lo mejor posible, es decir, de tamaño aparente tan grande como sea posible. La medida del ángulo simultáneo a considerar es, pues, la del menor de los dos ángulos, con el objeto de maximizarla. De este modo, cada polígono se verá del tamaño mayor posible, pero sin disminuir arbitrariamente el tamaño aparente del otro.

Definición 9 Sean P_1 y P_2 dos polígonos convexos disjuntos. Para cada punto v del plano, sea α_1 el ángulo de apertura con que v ve P_1 , y α_2 el ángulo con que v ve P_2 . Llamaremos ángulo de visión simultánea con que v ve los dos polígonos al mínimo de α_1 y α_2 .

Tal como ha quedado dicho, un punto del plano se considerará óptimamente situado para ver simultáneamente dos polígonos cuando en él se alcance el valor máximo del ángulo de visión simultánea de ambos polígonos.

Teorema 10 Sean P_1 y P_2 dos polígonos convexos disjuntos, con n lados en total, y T un polígono convexo de m lados, exterior a la envolvente convexa de $P_1 \cup P_2$. El valor máximo

del ángulo de visión simultánea con que un punto de T ve los dos polígonos P_1 y P_2 , así como el(los) punto(s) en que se alcanza, se puede hallar en tiempo $O(\min(n \log m, n + m, n + n \log \frac{m}{n}))$.

Demostración: Un algoritmo que resuelve este problema es el siguiente:

1. En primer lugar, deben eliminarse los posibles problemas de oclusión, determinando la intersección de T con la región de visibilidad simultánea de P_1 y P_2 , es decir, con las tangentes interiores comunes a P_1 y P_2 . Llamaremos T al polígono resultante.
2. A continuación, mediante las tangentes interiores comunes a T y a P_1 , se determina la cadena de T desde la cual se puede ver P_1 . Lo mismo para P_2 . De este modo se elimina también la posible oclusión por parte del mismo polígono T . Llamaremos T a la cadena resultante.
3. Al situar el punto de vista en cualquier punto de T , las rectas de soporte a P_1 y P_2 (que son las que determinan los ángulos α_1 y α_2) sólo pueden apoyarse en determinadas cadenas de P_1 y P_2 . Dichas cadenas, que seguiremos llamando P_1 y P_2 , se determinan trazando las rectas de soporte a P_1 y P_2 desde los extremos de T .
4. Se consideran ahora los lados de P_1 , y se prolongan hasta cortar a T (véase la Figura 7). Cada uno de ellos corta a T en un único punto, por la construcción misma de T y P_1 . Además, los puntos de intersección de los lados de P_1 en T mantienen la ordenación de los lados de los que provienen, a causa de la convexidad de T y P_1 . Lo mismo ocurre para P_2 .

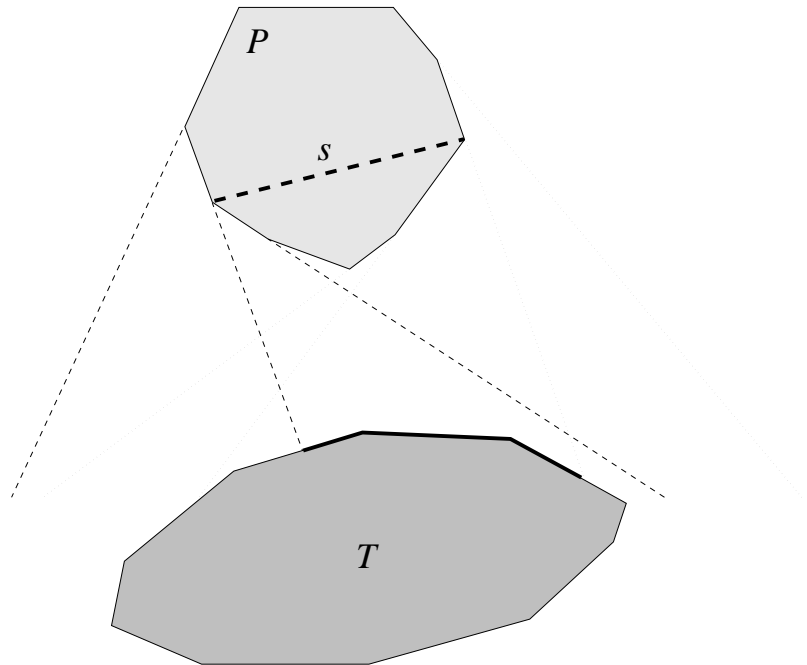


Figura 7: Desde cada una de las subcadenas en que queda descompuesta T se ve el polígono P como un mismo segmento s .

5. Todos estos puntos hallados sobre T producen una descomposición de T en n subcadenas, que se caracterizan por el hecho de que desde cada una de ellas los polígonos

P_1 y P_2 se ven como dos segmentos fijos, s_1 y s_2 . Por consiguiente, en cada una de las subcadenas la función a optimizar, $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ es unimodal, y su máximo se encuentra en tiempo $O(1)$ [4, 7, 8].

6. No hay más que comparar todos los máximos hallados para determinar el máximo de la función sobre todo T .

La complejidad del algoritmo es la siguiente: en los pasos 1, 2 y 3 se calculan las tangentes interiores comunes a P_1 y P_2 , a T y P_1 y a T y P_2 , así como las rectas de soporte de dos vértices de T a P_i , $i = 1, 2$. Todo esto puede hacerse en tiempo $O(\log(n + m))$ [6, 13]. Además, en el paso 1 se cortan dos rectas con T , cosa que puede hacerse en tiempo $O(\log m)$.

En el paso 4, se deben hallar las intersecciones de T con las prolongaciones de cada uno de los P_i . Ya se ha hecho notar que los puntos de intersección de cada P_i con T mantienen su ordenación, de modo que tres son las formas de hallarlos. La primera es calcular cada uno de ellos en tiempo $O(\log m)$ por búsqueda binaria sobre T , aprovechando la convexidad de éste. El coste total del paso 4 es, en este caso, $O(n \log m)$. La segunda es calcular el primer punto de intersección por búsqueda binaria, en tiempo $O(\log m)$, para luego ir obteniendo los siguientes ordenadamente, mediante un recorrido de T . De este modo, el coste de hallarlos todos es $O(n + m)$. La tercera consiste en calcular el primer punto de intersección del modo antedicho, pero luego calcular los siguientes mediante un recorrido de T que salte, a cada intento, el doble de lados que en el salto anterior. Este método resuelve la cuestión en tiempo $O(n + n \log \frac{m}{n})$. (Para más detalles sobre estos tres métodos, véanse [4, 15]).

Entonces se tienen que reunir los puntos de T hallados por intersección de las prolongaciones de los lados de P_1 y P_2 . Puesto que tanto unos como otros están ya ordenados, esto puede hacerse en tiempo proporcional al número de puntos presentes, que es $O(n)$.

En el paso 5 se halla el máximo de α en cada de las n subcadenas de T , en tiempo logarítmico en su logitud [15]. El coste total de este paso es

$$\sum_{i=1}^n O(\log m_i) = O(n \log \frac{m}{n}),$$

ya que $\sum_{i=1}^n m_i = O(n + m)$. También puede resolverse este paso optimizando α en tiempo $O(1)$ sobre cada uno de los $n + m$ subsegmentos en que ha quedado descompuesta la cadena T , esto es, en tiempo $O(n + m)$.

Finalmente, en el paso 6 se comparan los n valores hallados en tiempo $O(n)$.

La complejidad total del algoritmo, en resumen, es $O(\min(n \log m, n + m, n + n \log \frac{m}{n}))$. \square

El Teorema anterior tiene un corolario inmediato referido a la visión simultánea de dos polígonos simples.

Corolario 11 Sean P_1 y P_2 dos polígonos simples de n lados en total, con envolventes convexas disjuntas. Sea T un polígono convexo de m lados, exterior a la envolvente convexa de $P_1 \cup P_2$. El valor máximo del ángulo de visión simultánea con que un punto de T ve a los dos polígonos P_1 y P_2 , así como el(los) punto(s) en que se alcanza, se puede hallar en tiempo $O(\min(n \log m, n + m, n + n \log \frac{m}{n}))$.

Demostración: Puesto que el ángulo de visión de un polígono y el de su envolvente convexa son el mismo, se empieza por calcular la envolvente convexa de P_1 y P_2 , y a continuación se aplica el Teorema 10. \square

4 El caso tridimensional

La primera cuestión que se plantea al intentar extender al espacio tridimensional el concepto de ángulo de apertura o de visión de objetos tridimensionales es la de la definición misma de dicho ángulo. Si en el plano el objetivo consiste en localizar a lo largo de cierta trayectoria el punto desde el cual se ve determinado objeto poligonal con tamaño aparente máximo, o bien el punto que barre un campo de visión máximo entre dos obstáculos poligonales dados, en tres dimensiones los problemas que deseamos abordar son del mismo tipo: desde cierto punto de vista, se trata de mirar un objeto poliédrico de forma que su tamaño aparente sea máximo, o bien de barrer, a través de obstáculos tridimensionales, un campo de visión tan amplio como sea posible. La cuestión es cómo precisar los conceptos de “tamaño aparente máximo”, “campo de visión amplio”, etc.

En el caso bidimensional, tanto los problemas de visión de objetos poligonales como los de visión a través de obstáculos se acaban reduciendo al problema básico de la visión de segmentos. En el caso tridimensional, sería posible hacer lo mismo. De hecho, en [12] se resuelven diversos problemas de optimización del ángulo de visión de un segmento desde distintas trayectorias en el espacio (planos, rectas, polígonos, poliedros). Sin embargo, y dejando a un lado la idea de definir la medida angular tridimensional en términos del ángulo (plano) de visión de segmentos, la medida que primero viene a la mente a la hora de extender al espacio tridimensional el concepto bidimensional de ángulo de apertura es la del ángulo sólido [14]. El ángulo sólido con que es visto un conjunto $C \in E^3$ desde un punto v exterior a $\text{conv}(C)$ se define como el área interceptada, sobre la esfera de centro v y radio 1, por las semirrectas con origen en v que pasan por los puntos de C (Figura 8). Esta medida es, a primera vista, la más natural, pero en un segundo análisis

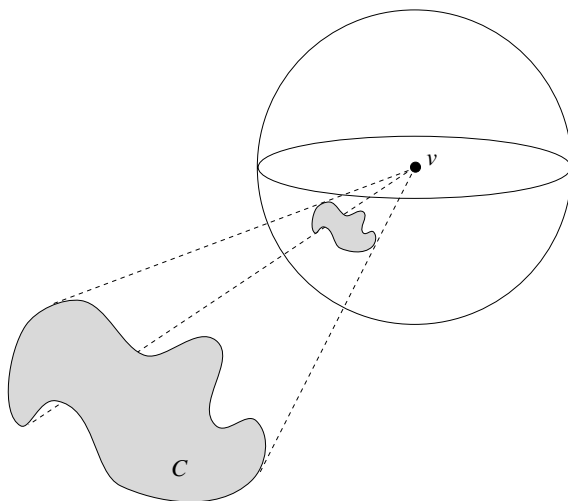


Figura 8: El ángulo sólido definido por v y C es el área sombreada de la esfera unidad centrada en v .

presenta varios inconvenientes. El primero es de orden práctico, y se refiere a su dificultad de manipulación. El segundo, y fundamental, es que no se adapta bien a los problemas discretos ni proporciona un modelo realista de las situaciones a que se desea aplicar. Vamos a ver con más detalle cómo se concretan estos inconvenientes. Del análisis de estos problemas surgirá la medida angular que finalmente hemos adoptado.

La dificultad de manipulación del ángulo sólido queda de manifiesto con un ejemplo básico. El caso más sencillo de estudiar en el plano es el de la visión de un segmento desde

un punto situado en uno de los dos semiplanos abiertos definidos por la recta de soporte del segmento: dado un punto v y un segmento s así situados, el ángulo con que v ve s se calcula en tiempo constante. No sólo eso, sino que el lugar geométrico de los puntos de cada semiplano que ven el segmento s con ángulo de visión α dado es una curva bien conocida: el arco capaz de s de medida α . Por analogía, un caso sencillo de estudiar en el espacio sería el de la visión de un círculo desde un punto de uno de los dos semiespacios abiertos definidos por el plano de soporte del círculo. Sin embargo, dado un punto v y un círculo C así situados, el ángulo sólido con que v ve C se calcula en tiempo constante, pero de forma harto más dificultosa. De hecho, el cono de vértice v y directriz ∂C es, en general, propiamente elíptico, y sólo es circular cuando v se encuentra sobre la recta perpendicular a C que pasa por su centro. Por consiguiente, su intersección con la esfera de centro v y radio 1 es una curva en general no plana, y el área a calcular para determinar el ángulo sólido con que v ve a C no es la de un casquete esférico. Es más, el valor del ángulo sólido con que v ve a C no puede expresarse mediante las operaciones algebraicas y trigonométricas básicas, sino que acaba teniendo que aproximarse mediante algún método de integración numérica [15].

Con ser el problema práctico de su cálculo un inconveniente para su uso, no hemos descartado el ángulo sólido como medida para nuestros problemas por este motivo, sino principalmente porque no resuelve como quisiéramos algunos de nuestros problemas. Supóngase, por ejemplo, que quiere medirse el ángulo de apertura necesario para que una cámara de fotografía situada en determinada posición del espacio capte una serie de puntos estratégicamente situados. Formalmente, se trata de determinar el ángulo mínimo de visión de una nube de puntos desde cierta posición v . La definición del ángulo de visión como ángulo sólido conlleva que, cualquiera que sea la posición de v , el ángulo valga cero, puesto que la proyección central desde v sobre la esfera de un conjunto discreto de puntos es un conjunto de medida cero. Análogamente, si quisiera medirse, como en [12], el ángulo de visión de un segmento desde un punto dado, el resultado volvería a ser cero. Sin embargo, en cualquier aplicación realista, tanto en términos de visión como en términos de iluminación, cualquier persona coincidirá en afirmar que el ángulo de apertura de un foco que pretenda iluminar determinadas posiciones estratégicas de un escenario no puede ser cero, y que el ángulo de apertura de la cámara fotográfica de un turista que quiera fotografiar la Torre Eiffel no puede ser cero.

La circularidad de los objetivos de las cámaras y focos luminosos habituales da una indicación de cuál puede ser una medida razonable del ángulo de visión. Ésta es, finalmente, la definición que hemos adoptado.

Definición 12 *Sea C un conjunto de puntos de E^3 , y v un punto que no pertenezca a su envolvente convexa. El ángulo con que v ve C es el ángulo de apertura del cono circular mínimo, con vértice en v , que contiene a C (Figura 9).*

Cabe destacar, además, que la definición adoptada es una extensión de la del ángulo de visión bidimensional, puesto que coincide con ésta en el caso en que el problema es sólo aparentemente tridimensional:

Teorema 13 *Sea C un conjunto conexo de puntos de E^3 , situado en un plano π , y sea v un punto de E^3 que no pertenece a $\text{conv}(C)$ pero es coplanario con C . El ángulo (en el sentido tridimensional) con que v ve C coincide con el ángulo plano con que v ve C en π .*

Demostración: El cono circular mínimo que contiene a C y tiene vértice en v tiene dos generatrices en π , que son las semirrectas de soporte de C con origen en v (Figura 10). \square

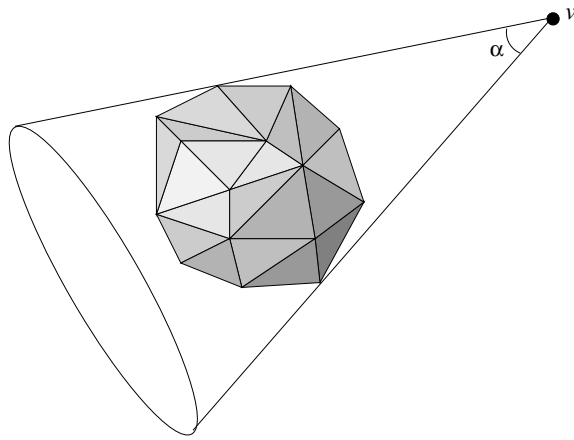


Figura 9: El ángulo con que v ve C .

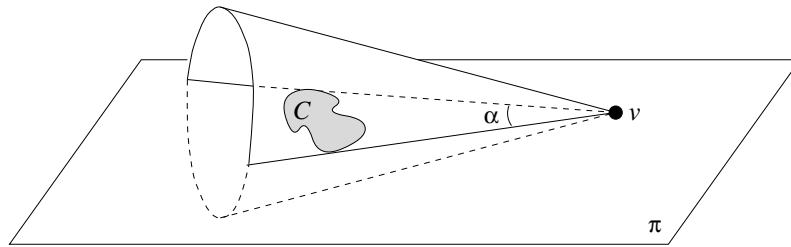


Figura 10: El ángulo tridimensional con que v ve C coincide con el ángulo plano con que v ve C en π .

En conclusión, puede afirmarse que, desde el punto de vista de la generalización de los resultados bidimensionales, la medida que hemos adoptado para el ángulo de visión tridimensional se comporta de modo adecuado: cuando el problema es, en realidad, plano, el ángulo de visión 2D y el ángulo de visión 3D coinciden.

También se define, en términos semejantes, el ángulo de visión a través de obstáculos. Véase [15] para más detalles. Aquí ofrecemos la solución de un primer problema de decisión en el estudio del ángulo de visión tridimensional.

Teorema 14 *Sea C una nube de n puntos, y v un punto exterior a $\text{conv}(C)$. El ángulo con que v ve C puede calcularse en tiempo $O(n)$.*

Demostración: Sea S la esfera unidad con centro en v , y proyéctense los puntos de C sobre S con centro de proyección en v . El resultado es un nuevo conjunto de puntos $C' \subset S$.

Por la construcción de C' a partir de C , todo cono, con centro en v , que contiene a C' , contiene también a C , y viceversa. Por consiguiente, el cono circular mínimo que contiene a C coincide con el cono circular mínimo que contiene a C' . Es decir, el ángulo con que v ve C coincide con el ángulo con que v ve C' .

Ahora bien, por estar los puntos de C' sobre S , el cono circular mínimo que contiene a C' y tiene centro en v corta a S en el casquete esférico mínimo que contiene a C' . Hemos reducido, pues, el problema al del mínimo círculo contenedor de una nube de puntos sobre la esfera S . Este problema se estudia en [10, 15]. Su solución depende de si los puntos a cubrir se encuentran todos en una misma semiesfera o no. En caso afirmativo, la solución se encuentra en tiempo lineal, mediante la resolución de un problema de programación lineal asociado a los planos que pasan por los puntos de la semiesfera y son tangentes a

ésta. Puesto que v es exterior a la envolvente convexa de C , los puntos de C' están por fuerza contenidos en un hemisferio de S y su mínimo círculo recubridor puede calcularse en tiempo $O(n)$. \square

Este resultado tiene consecuencias inmediatas que se recogen en los corolarios siguientes:

Corolario 15 *Sea C una poligonal o polígono de n vértices en E^3 , y v un punto exterior a $\text{conv}(C)$. El ángulo con que v ve C puede calcularse en tiempo $O(n)$.*

Demostración: Por su convexidad, todo cono circular que contenga los vértices de la poligonal o polígono C contiene a C , y viceversa. Por consiguiente, al ángulo con que v ve C coincide con el ángulo con que ve los vértices de C , que puede hallarse en tiempo $O(n)$. \square

Corolario 16 *Sea C un poliedro de n vértices en E^3 , y v un punto exterior a $\text{conv}(C)$. El ángulo con que v ve C puede calcularse en tiempo $O(n)$.*

Demostración: El mismo argumento de convexidad reduce el problema al del ángulo con que v ve el conjunto de los vértices de C . \square

Referencias

- [1] D. Avis, B. Beresford-Smith, L. Devroye, H. ElGuindy, E. Guevremont, F. Hurtado y B. Zhu. Unoriented θ -maxima in the plane. Próxima publicación en *Siam. J. on Comp.* Una versión preliminar puede hallarse en *Proc. of the 16th Australian Conference in Computer Science*, 1993.
- [2] M. Blum, R. W. Floyd, V. Pratt, R. L. Rivest y R. E. Tarjan. Time bounds for selection. *J. Comput. and Syst. Sci.*, 7:448–461, 1973.
- [3] P. Bose, L. Guibas, A. Lubiw, M. Overmars, D. Souvaine y J. Urrutia. The floodlight problem. En *Proc. 5th Canad. Conf. Comput. Geom.*, pp. 399–404, Waterloo, Canada, 1993.
- [4] P. Bose, F. Hurtado, E. Omaña, J. Snoeyink y G. Toussaint. Some aperture-angle optimization problems. Sometido para su publicación en *Algorithmica*. Una versión preliminar puede hallarse en *Proc. 7th Canad. Conf. Comput. Geom.*, pp. 73–78, 1995.
- [5] R. W. Floyd y R. L. Rivest. Expected time bounds for selection. *Communications of the ACM*, 18(3):165–172, 1975.
- [6] L. Guibas, J. Hershberger y J. Snoeyink. Compact interval trees: a data structure for convex hulls. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 1(1):1–22, 1991.
- [7] F. Hurtado. Looking through a window. En *Proc. 5th Canad. Conf. Comput. Geom.*, pp. 234–239, Waterloo, Canada, 1993.
- [8] F. Hurtado. *Problemas geométricos de visibilidad*. Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, 1993.

- [9] F. Hurtado, S. Ramaswami, V. Sacristán y G. Toussaint. Prunning with linear programming and median finding. Manuscrito, 1997.
- [10] F. Hurtado, V. Sacristán y G. Toussaint. Constrained minimax facility location. Sometido para publicación en *Studies in Locational Analysis*, 1997.
- [11] N. Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in R^3 and related problems. *SIAM J. Comput.*, 12:759–776, 1983.
- [12] E. Omaña. Aperture angle optimization problems. Master's thesis, School of Computer Science, McGill University, 1994.
- [13] M. H. Overmars y J. van Leeuwen. Maintenance of configurations in the plane. *J. Comput. Syst. Sci.*, 23:166–204, 1981.
- [14] P. Puig Adam. *Curso de Geometría Métrica*. Biblioteca Matemática, 1947.
- [15] V. Sacristán. *Optimización geométrica y aplicaciones en visibilidad*. Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, 1997.
- [16] R. Seidel. Linear programming and convex hulls made easy. En *Proc. 6th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pp. 211–215, 1990.