

Problemas de distancias en grafos continuos^{*}

Delia Garijo, Rodrigo I. Silveira

Delia Garijo
Departamento de Matemática Aplicada I
Universidad de Sevilla
Avda. Reina Mercedes, s/n. 41012 Sevilla
dgarijo@us.es

Rodrigo I. Silveira
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona, 1-3. 08034 Barcelona
rodrigo.silveira@upc.edu

Resumen

El estudio de parámetros asociados a distancias tiene una posición central en la teoría de grafos, debido tanto a su interés teórico como a sus múltiples aplicaciones. Tradicionalmente, los problemas en estudio trataban con distancias entre los vértices del grafo pero, en la última década, se ha desarrollado un gran interés en explorar una versión continua de muchos de estos problemas. Informalmente, la continuidad se entiende como que las aristas del grafo están formadas por infinitos puntos, de modo que las distancias en estos grafos continuos se toman, al contrario que en la variante discreta, entre infinitos pares de puntos. Este trabajo tiene como objetivo ofrecer una panorámica de los estudios desarrollados sobre el diámetro y la distancia media en este novedoso contexto de grafos continuos. Incidiremos en los efectos de trasladar nociones básicas de grafos al terreno continuo, tanto a nivel conceptual como algorítmico.

1. Introducción

Los grafos son uno de los objetos combinatorios más sencillos, ya que, en su versión más simple, solo intervienen un conjunto (normalmente, pero no necesariamente, finito), los *vértices*, y pares de elementos de dicho conjunto, las *aristas*. Sin embargo, a pesar de dicha simplicidad, la teoría de grafos es sumamente fructífera y presenta numerosas ramificaciones e interconexiones con otras disciplinas: algebraica, numérica, puramente combinatoria, algorítmica, etc. Y, dada su gran versatilidad para modelar situaciones en distintos campos, son incontables sus aplicaciones.

Aunque el estudio de los grafos se remonta a Euler y el famoso problema de los puentes de Königsberg, se puede considerar que desde mediados de los años treinta del siglo pasado ha vivido un gran auge (véanse, por ejemplo, las reseñas publicadas en este boletín [50, 51]). Este

^{*} Este trabajo es una versión preliminar en castellano del artículo publicado en el *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* [30].

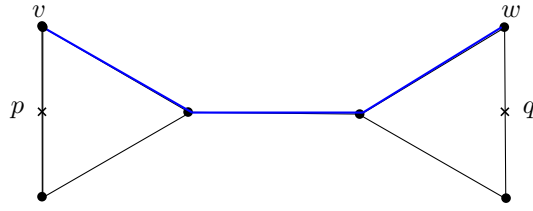


Figura 1: Cada arista del grafo tiene longitud 1. La distancia entre los vértices v y w es 3 y un camino mínimo (en este caso único) lo forman las aristas con un trazo más grueso de color azul. La máxima distancia en el grafo si consideramos todos los puntos sobre las aristas no se da entre vértices, sino entre los puntos p y q marcados con una cruz (para obtener un camino mínimo entre ellos basta añadir al camino azul los fragmentos de arista vp y wq).

impulso viene dado de la mano de sus aplicaciones, puesto que los vértices pueden representar cualquier objeto o concepto, y las aristas establecen relaciones entre estos objetos.

En muchas aplicaciones, los elementos de los que se compone un grafo llevan asociada alguna información geométrica: los vértices se corresponden con puntos en algún espacio y las aristas con curvas en ese espacio. Un ejemplo sencillo es el esquema como grafo de un mapa de carreteras y otro (geométricamente) más sutil es el diseño de un microchip, en el que no solo es importante la unión entre los distintos componentes, sino cómo se unen: los cruces no deseados se evitan mediante poligonales ortogonales, las cuales han de tener la mínima longitud y el mínimo número de codos.

De manera natural surge así el concepto de *longitud* de un *camino* en un grafo, y de ahí la noción de *distancia* entre vértices. Los caminos en grafos son, informalmente, secuencias de aristas que conectan dos vértices. Asignando un peso o longitud a cada arista, la longitud del camino es la suma de los pesos de las aristas que lo componen, y la distancia entre dos vértices es la longitud mínima de un camino que los conecta (véase en la Figura 1 la distancia entre los vértices v y w).

Los problemas relacionados con distancias son particularmente importantes en la teoría de grafos; en la literatura se pueden encontrar cientos de estudios enmarcados en lo que llamamos un contexto *discreto*, es decir, las distancias que se consideran son solo entre vértices del grafo. Sin embargo, en la última década ha comenzado a explorarse una variante *continua* de muchos de estos problemas, la cual es más natural desde el punto de vista de numerosas aplicaciones. De manera informal podemos decir que la gran diferencia entre ambas variantes es que, en el problema a tratar, se pasa de considerar distancias solo entre vértices (discreto) a distancias entre cualesquiera dos puntos que estén sobre las aristas del grafo (continuo). Dicho de otra forma: pasamos de considerar un número finito de distancias a un número infinito, lo cual aumenta enormemente la complejidad del problema en estudio.

La Figura 1 nos ilustra, con un ejemplo muy sencillo, la diferencia entre las variantes discreta y continua del problema de calcular la distancia máxima en un grafo. El grafo de la figura es un *grafo plano*, es decir, es un dibujo en el plano de un grafo de modo que no hay cortes entre las aristas (salvo en los extremos)¹. Si asignamos longitud 1 a cada arista, la distancia máxima entre los vértices es 3, pero la distancia máxima entre los puntos que están sobre las aristas (formalmente, el lugar geométrico de la imagen de la inmersión en el plano)

¹Los grafos con esa propiedad, llamados *grafos planares*, fueron caracterizados por Kuratowski [40]. Hay que distinguir entre grafo planar y una inmersión de dicho grafo en el plano, que es el grafo plano.

es 4.

Así, un grafo combinatorio G define un *grafo continuo*² $\mathcal{G}$ como el conjunto infinito de puntos determinado por los vértices y aristas de G , donde cada punto sobre una arista es parte del grafo. Formalizamos a continuación esta idea de continuidad en grafos y, en particular, lo que significa que un punto esté sobre una arista.

Partimos de un grafo combinatorio conexo no dirigido³ $G = (V, A, \ell)$ donde V y A son, respectivamente, los conjuntos de vértices y aristas, y ℓ es una función que asigna una longitud $\ell(a) \geq 0$ a cada arista $a \in A$ (asumimos que no todas las longitudes son cero). Para cada arista uv de G (denotada mediante sus vértices extremos u, v), consideramos un segmento cerrado $\mathcal{G}(uv)$ de longitud $\ell(uv)$ con su métrica y medida habitual. Seleccionamos arbitrariamente un extremo de cada segmento. Para cada vértice u de G , tomamos los segmentos que corresponden a aristas incidentes en u e identificamos el extremo seleccionado (del correspondiente segmento) con u . El espacio resultante es el grafo continuo $\mathcal{G}$ definido por G .

Hacemos notar que el grafo continuo $\mathcal{G}$ se puede pensar como un complejo simplicial de dimensión 1 donde cada arista uv es isométrica a un segmento de longitud $\ell(uv)$. Por ello, decimos indistintamente vértices (aristas) de G o de $\mathcal{G}$.

Un punto p de $\mathcal{G}$ viene dado por una tripleta $(uv, u, \lambda) \in A \times V \times [0, \ell(uv)]$, que representa el punto del segmento $\mathcal{G}(uv)$ a distancia λ (sobre el segmento) del extremo identificado con u . Las tripletas (uv, u, λ) y $(uv, v, \ell(uv) - \lambda)$ definen el mismo punto de $\mathcal{G}$. Utilizamos $p \in \mathcal{G}$ para indicar que p es un punto del grafo continuo $\mathcal{G}$, y de forma análoga indicamos la pertenencia a una arista.

Los grafos continuos son una clase más general de los llamados *grafos geométricos* [43], en los que cada vértice es un punto en el plano y cada arista es un segmento conectando los puntos correspondientes. Además, la definición de grafo geométrico requiere que ninguna arista pase por un vértice que no sea uno de sus extremos. Todo grafo geométrico puede ser visto como un grafo continuo, pero no al revés. Por ejemplo, un grafo continuo *completo*⁴ con cuatro vértices donde todas las aristas tienen longitud uno no se puede realizar como un grafo geométrico (ya que en $\mathbb{R}^2$ no es posible que todos los pares de vértices estén a distancia 1).

Los grafos geométricos han sido ampliamente estudiados, no solo por su interés a nivel teórico sino también debido a sus múltiples aplicaciones en problemas relacionados, en particular, con diseño de redes e información geográfica; véanse, por ejemplo, las referencias en [46, 55].

Los conceptos de camino y distancia se extienden de forma natural del contexto discreto al continuo, de hecho ya hemos utilizado estas ideas al referirnos a la Figura 1 para ilustrar una diferencia numérica entre las dos variantes. En el caso continuo, los caminos están definidos no solo por aristas sino también por a lo sumo dos fragmentos de aristas (como los caminos entre los puntos p y q de la Figura 1). La distancia entre dos puntos $p, q \in \mathcal{G}$ se denota por $d_{\mathcal{G}}(p, q)$. Asumimos que la distancia entre los dos extremos de una arista a es $\ell(a)$, por lo cual si $p = (uv, u, \lambda)$ y $q = (uv, u, \lambda')$ están sobre la misma arista uv , se tiene que $d_{\mathcal{G}}(p, q) = |\lambda - \lambda'|$.

Un ejemplo tan sencillo como el de la Figura 1 ya nos muestra como aumenta la dificultad cuando pasamos de tratar con distancias en G a distancias en $\mathcal{G}$. Las diferencias no se reducen a un mero valor numérico, sino que surgen cuestiones más profundas: si nos centramos en uno de los triángulos de la figura, la mayor de las distancias dentro del triángulo es 1 y dicho valor

²También llamado *grafo métrico* en otras áreas más cercanas a análisis [27, 41].

³En un grafo conexo no dirigido todos los vértices están conectados por un camino y las aristas establecen relaciones simétricas entre los vértices.

⁴Un grafo es *completo* si existen aristas uniendo todos los pares de vértices.

lo alcanzan las tres parejas de vértices pero, como grafo continuo, cada uno de los puntos que están sobre las aristas admite otro punto a máxima distancia (en el triángulo) 1,5. Así, desde un punto de vista algorítmico, en el caso continuo nos encontramos en muchas ocasiones con la dificultad inicial de discretizar el problema, hecho que no ocurre si consideramos el mismo problema en grafos combinatorios.

Hemos organizado este artículo en dos secciones principales. En la Sección 2 explicamos como abordar algorítmicamente el problema del cálculo en el caso continuo de parámetros relacionados con distancias (muy estudiados en su variante discreta). En la Sección 3 nos centramos en realizar modificaciones sobre los grafos continuos: trasladamos al caso continuo los bien conocidos *problemas de aumento* del contexto discreto y un parámetro clásico de la geometría, el *número de Borsuk*. En cada sección detallaremos los trabajos relacionados y remarcaremos las diferencias y peculiaridades del caso continuo con respecto al discreto.

2. Medidas para grafos continuos

Los parámetros numéricos proporcionan información muy diversa sobre el grafo al que están asociado; por ejemplo, sobre coloraciones, orientaciones o flujos. En la bibliografía podemos encontrar multitud de estudios que abarcan enfoques de muy distinta índole, desde problemas algorítmicos relacionados con su cálculo hasta cuestiones de tipo algebraico que los relacionan con invariantes polinómicos de grafos. El abanico de parámetros numéricos que tratan con distancias es tan amplio que solo mencionamos varios de ellos que han sido muy estudiados: diámetro, radio, dilación y distancia media. Aunque todos estos parámetros se pueden trasladar de forma natural a grafos continuos, en este artículo describimos estudios relacionados con el diámetro y con la distancia media.

2.1. Diámetro

A diferencia del *diámetro* de un grafo combinatorio, en el que se toma la máxima de las distancias entre los distintos pares de vértices, en un grafo continuo el máximo se toma entre un número infinito de pares de puntos. En efecto, el diámetro de un grafo continuo $\mathcal{G}$ o *diámetro continuo* de G , denotado por $\text{diam}(\mathcal{G})$, es la distancia máxima entre cualquier par de puntos en $\mathcal{G}$:

$$\text{diam}(\mathcal{G}) := \max_{p,q \in \mathcal{G}} d_{\mathcal{G}}(p,q).$$

Dos puntos cuya distancia alcanza este valor se llaman *puntos diametrales* o *par diametral*. Los problemas que tratan con el diámetro continuo de un grafo, también llamado *diámetro generalizado* [17], han recibido considerable atención recientemente, véanse, por ejemplo, [2, 5, 13, 15, 28].

2.1.1. Pares diametrales

Es fácil encontrar grafos continuos donde hay un número infinito de pares diametrales; por ejemplo, en cualquier grafo que sea un único ciclo el diámetro continuo es la mitad del perímetro del ciclo, y para todo punto en el ciclo existe otro a exactamente esa distancia, véase la Figura 2.

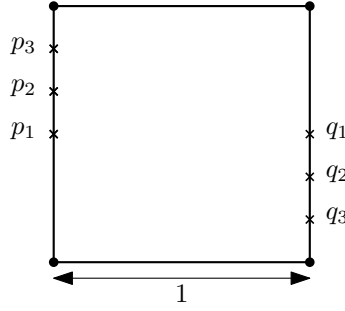


Figura 2: En un grafo ciclo continuo, como este cuadrado de lado 1, todo punto es parte de un par diametral: $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots$. En particular, todo punto tiene a otro a distancia 2, valor que es igual al diámetro.

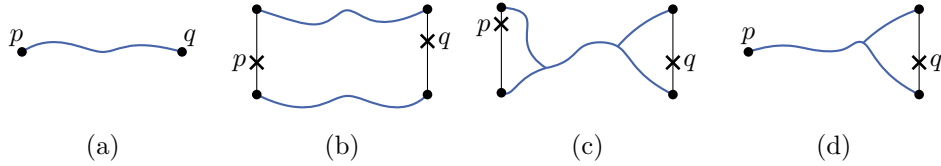


Figura 3: Tipos de pares diametrales en un grafo continuo.

Sin embargo, una observación fundamental es que para calcular el diámetro continuo basta con mirar sólo un conjunto finito de pares de puntos, ya que siempre hay pares diametrales dispuestos de cierta manera particular. En concreto, las situaciones posibles se ilustran en la Figura 3, y se resumen en la siguiente observación.

Observación 2.1 ([13]). En todo grafo continuo $\mathcal{G}$ siempre existe un par diametral que satisface alguna de las condiciones siguientes:

1. p y q son vértices,
2. p es un vértice de grado⁵ 1 y q es un punto interior de una arista cuyos extremos tienen grado al menos 2,
3. p y q son puntos interiores de aristas cuyos extremos tienen grado al menos 2.

En el caso (1) de la Observación, cuando p o q son vértices, sólo hay tantos candidatos como vértices. Sin embargo, en principio no está del todo claro cómo encontrar los puntos p y q cuando son interiores a las aristas (ya que hay infinitos candidatos). Afortunadamente, el hecho de que p y q tengan que formar un par diametral restringe las posibles posiciones dentro de una arista. La clave viene dada por el hecho de que si un punto p es parte de un par diametral p, q , y p está en el interior de una arista, entonces deben existir dos caminos mínimos de p a q , uno por cada extremo de la arista. Cuando la unión de estos dos caminos es un ciclo, como en la Figura 3(b), un argumento de continuidad demuestra que siempre se puede desplazar uno de los dos puntos hasta un vértice de $\mathcal{G}$. En el caso de la Figura 3(c), no es posible mover p o q sin que el par deje de ser diametral. Así, la posición del punto interior a la arista es única:

⁵El *grado* de un vértice es el número de aristas que tienen a ese vértice como extremo.

Observación 2.2. Sea $\mathcal{G}$ un grafo continuo, y sea p, q un par diametral de $\mathcal{G}$, con p en el interior de una arista uv y q en el interior de una arista wz , en la situación de la Figura 3(c), es decir, tal que no existan dos caminos mínimos disjuntos entre p y q . Entonces no existe ningún otro par de puntos en las aristas uv y wz que sean diametrales. Más aún, p y q están unívocamente determinados por las distancias $d_{\mathcal{G}}(u, w)$, $d_{\mathcal{G}}(u, z)$, $d_{\mathcal{G}}(v, w)$, $d_{\mathcal{G}}(v, z)$.

Esto implica que para calcular $\text{diam}(\mathcal{G})$ es posible restringirse a pares formados por vértices y aristas, es decir, pares de elementos del conjunto $V \cup A$; concretamente, el diámetro es el máximo de las distancias máximas entre pares de este tipo. La distancia máxima entre un vértice y una arista es la distancia máxima entre el vértice y un punto de la arista, donde el máximo se toma sobre los infinitos puntos de la arista. La distancia máxima entre dos aristas se define análogamente, tomándola sobre todos los pares de puntos donde cada uno pertenece a una de las aristas. Así, la distancia máxima entre las aristas de la Figura 3(b) es $d_{\mathcal{G}}(p, q)$ y coincide con el semiperímetro del ciclo que forman los dos caminos mínimos entre los puntos.

2.1.2. Cálculo del diámetro continuo

Lo anterior implica que para determinar el diámetro de un grafo continuo es suficiente con examinar un número finito de valores: tantos como pares de vértices, pares de aristas y pares vértice-arista haya en el grafo. Sin embargo, previamente, se ha de calcular la matriz de distancias de los vértices del grafo G (esto es: la matriz de tamaño $n \times n$ que contiene la distancia entre cada par de vértices de G).

El cálculo de la matriz de distancias de un grafo es computacionalmente intenso, y ha sido objeto de mucho estudio. El mejor algoritmo actualmente disponible para calcular los caminos mínimos entre todos los pares de vértices de un grafo con pesos reales tiene un tiempo de ejecución de $A(n, m) = O(nm \log \alpha(m, n))$ [45], donde $\alpha(m, n)$ es la inversa de la función de Ackermann, una función que tiene un crecimiento extremadamente lento. Para algunas clases de grafos se conocen algoritmos más rápidos, como grafos planares con pesos no negativos (donde $A(n, m) = O(n^2)$ [36]), o grafos con pesos enteros no negativos (para los cuales $A(n, m) = O(nm)$ [54]).

Así, una vez calculada la matriz de distancias en tiempo $A(n, m)$, el diámetro continuo de un grafo con n vértices y m aristas puede calcularse en tiempo⁶ $O(n^2 + nm + m^2) = O(m^2)$ calculando cada una de las distancias y retornando la máxima de todas [13, 17].

En la práctica, un tiempo de $O(m^2)$ puede ser prohibitivamente alto. Recordemos que un grafo, si es denso, puede tener $m = \Theta(n^2)$ aristas, por lo que el cálculo del diámetro requeriría tiempo $\Theta(n^4)$, que es inasumible en la mayoría de los casos. Pero aunque el grafo fuera esparso, es decir, con $m = O(n)$, obtendríamos un algoritmo cuadrático en el número de vértices, que suele ser impracticable ya para grafos de tamaño mediano. Esto lleva a la pregunta de si es posible calcular el diámetro continuo más rápidamente.

Esta misma pregunta ha recibido muchísima atención para grafos combinatorios. De hecho, el cálculo eficiente del diámetro es un problema central sobre algoritmos en la teoría de grafos. En grafos combinatorios (con pesos en las aristas), el algoritmo más natural consiste en calcular desde cada vértice las distancias a todos los demás. Haciendo esto con un método estándar como el *algoritmo de Dijkstra*, el diámetro se calcula en tiempo $O(nm + n^2 \log n)$.

⁶Los tiempos de cómputo a los que nos referimos en este trabajo, usando notación asintótica, asumen un modelo de cómputo que en la mayoría de los casos es el *real RAM*, estándar en geometría computacional desde que fue propuesto por Shamos [52].

Para grafos con pesos reales, como ya mencionamos anteriormente, esto se puede mejorar a $O(nm \log \alpha(m, n))$ [45], lo cual nos diría que el diámetro se puede calcular en un tiempo que es, grosso modo, $O(nm)$. Si el grafo es esparso, esto queda en $O(n^2)$, que sigue siendo demasiado. Sin embargo, poco más se puede hacer en general. En 2013, Roditty y Vassilevska Williams [49] demostraron que no existen algoritmos de complejidad $O(n^{2-\varepsilon})$, para cualquier constante $\varepsilon > 0$, que puedan calcular el diámetro en grafos (combinatorios) esparsos, siempre que se cumpla la *hipótesis del tiempo exponencial*—una suposición ampliamente adoptada dentro de la complejidad computacional.

Esto hizo que la investigación se centrara en caracterizar familias de grafos para las cuales el diámetro se pudiera calcular más eficientemente. A día de hoy, se conocen algoritmos subcuadráticos para el diámetro de grafos de *treewidth* acotado [1, 7], grafos con *dimensión VC* acotada [22], *median graphs* [4] y, la familia más importante, grafos planares [11, 31].

Volviendo a los grafos continuos, vale la pena mencionar que la cota inferior para el cálculo del diámetro de un grafo combinatorio se puede extender a grafos continuos. En efecto, basta observar que, dado un grafo continuo, si se añade un camino suficientemente largo a cada vértice, el diámetro del grafo continuo resultante coincidirá con el diámetro del grafo combinatorio asociado. De esto se deduce que si se pudiera calcular el diámetro para cualquier grafo continuo en tiempo subcuadrático, también se podría calcular el diámetro de cualquier grafo combinatorio en tiempo subcuadrático. Por lo tanto, en general, tampoco es posible calcular el diámetro de un grafo continuo en tiempo subcuadrático.

La pregunta de para qué clases de grafos continuos es posible calcular el diámetro en tiempo subcuadrático está mucho más abierta que para grafos combinatorios. Dado que los algoritmos para calcular el diámetro en un grafo combinatorio, en general, no sirven para calcular el diámetro continuo, son necesarias nuevas técnicas. De hecho, a día de hoy existen sólo dos situaciones generales para las cuales se conocen algoritmos más eficientes para calcular el diámetro continuo [12], mencionadas a continuación.

Grafos con *treewidth* acotado. El *treewidth* o *anchura de árbol* es un parámetro de un grafo que cuantifica cuán similar a un árbol es el grafo. Para un grafo con n vértices, el *treewidth* es un valor entre 1 y $n - 1$. Por ejemplo, todo árbol tiene *treewidth* 1, y todo ciclo tiene *treewidth* 2. En el otro extremo, el grafo completo con n vértices tiene *treewidth* $n - 1$.

Para un grafo de *treewidth* constante k , se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Sea $k \geq 2$ constante. El diámetro continuo de un grafo con n vértices y *treewidth* a lo sumo k puede calcularse en tiempo $O(n \log^{4k-2} n)$.*

La demostración del teorema es muy técnica, pero la estrategia general puede resumirse como sigue. El resultado explota una propiedad clave de los grafos con *treewidth* acotado por k : que pueden ser separados en dos subgrafos (de tamaño proporcional a n y k), utilizando como mucho k vértices separadores. El diámetro del grafo continuo viene dado por el máximo entre los diámetros de cada subgrafo y la distancia máxima entre los subgrafos (dada por dos puntos, uno de cada subgrafo). El diámetro de cada subgrafo se calcula recursivamente. Para calcular la distancia máxima entre los dos subgrafos se consideran las longitudes de caminos mínimos cerrados que contengan a dos aristas dadas, una de cada subgrafo. Fijada una de las aristas, se puede modelar, como puntos en un espacio de $\Theta(k)$ dimensiones, como se modifican estas longitudes en función de los vértices separadores que utiliza el camino para ir de un subgrafo a otro. Esto permite usar estructuras avanzadas de búsqueda por

rango ortogonal [7] para calcular la máxima de todas estas longitudes que nos da la distancia máxima entre los dos subgrafos.

Grafos planares En el caso de los grafos planares, lo que se ha conseguido hasta ahora es un algoritmo cuya complejidad depende del número de caras del grafo, denotado por F . La fórmula de Euler para grafos planares garantiza que, independientemente de la inmersión del grafo en el plano, el número de caras F será siempre el mismo.

Teorema 2.4. *El diámetro continuo de un grafo planar con n vértices y F caras se puede calcular en tiempo $O(nF \log n)$.*

El algoritmo se basa en poder calcular, para cualquier cara, la distancia máxima entre dos puntos de la cara en tiempo $O(n \log n)$. Esto se logra utilizando técnicas para mantener el árbol de caminos mínimos desde un punto en la frontera de la cara, a medida que el punto se desplaza por la frontera. El hecho de que el grafo sea continuo hace especialmente complicado mantener los caminos mínimos, pero este obstáculo se puede superar utilizando estructuras de datos dinámicas adicionales.

Si bien este algoritmo es subcuadrático cuando $F \in o(\frac{n}{\log n})$, en general F puede ser $\Theta(n)$. El principal problema abierto en relación al cálculo del diámetro en grafos continuos es, sin duda, encontrar un algoritmo de complejidad subcuadrática para cualquier grafo planar.

2.2. Distancia media

La *distancia media* de un grafo $G = (V, A)$, denotada por $\mu(G)$, se define como la media aritmética de las distancias entre todo par de vértices:

$$\mu(G) := \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\{u,v\} \subseteq V} d_G(u,v),$$

donde la suma es sobre todos los pares no ordenados de vértices de G (y se considera que todas las aristas del grafo tienen longitud 1). Este concepto fue introducido por March y Steadman [42, Cap. 14] en el contexto de la arquitectura, con el objetivo de comparar planos de edificios. Pocos años después, Doyle y Graver [21] fueron los primeros en proponer la distancia media como parámetro de estudio en el ámbito de la teoría de grafos. Sin embargo, décadas antes el concepto ya había despertado el interés de Wiener para sus aplicaciones en química [56], que más adelante dieron lugar al conocido *índice de Wiener*⁷, probablemente el índice topológico molecular más estudiado con cientos de publicaciones.

En grafos combinatorios, la distancia media ha sido objeto de intensos estudios; en ciertos grafos muy simples, se sabe exactamente cuál es su valor. Por ejemplo, es 1 en cualquier grafo completo, y $(n+1)/3$ si el grafo es un camino de n vértices [21]. Sin embargo, cuando se aumenta ligeramente la complejidad del grafo, el cálculo de este parámetro se complica extraordinariamente. Además de presentar expresiones exactas para algunas clases específicas de grafos [9, 10, 21], la mayoría de trabajos se han centrado en demostrar cotas inferiores y superiores de la distancia media en función de distintos parámetros, como el número de vértices [21, 24, 47], el número de vértices y aristas [53], y la conectividad [25]. La distancia media también se ha estudiado para grafos con pesos en los vértices [18].

⁷Dado un grafo con todas sus aristas de longitud 1, su *índice de Wiener* es la suma de las distancias entre todo par (no ordenado) de vértices.

En un grafo continuo $\mathcal{G}$ definido por un grafo $G = (V, A, \ell)$, el concepto de distancia media se extiende de manera natural, como la media de las distancias para todo par de puntos de $\mathcal{G}$. Curiosamente, esta idea apenas ha sido estudiada, con excepción de los trabajos de Doyle y Graver [19, 20], aunque usando un enfoque diferente al aquí presentado y, muy recientemente, de Baptista et al. [3] que estudian cuestiones en el ámbito del análisis geométrico.

Dado un punto p de $\mathcal{G}$ y un subconjunto de aristas $A' \subseteq A$, se define la *distancia media continua* entre p y A' como

$$\mu_c(p, A') := \frac{1}{\ell(A')} \int_{q \in A'} d_{\mathcal{G}}(p, q) dq, \quad (1)$$

donde $\ell(A')$ es la longitud total de A' , es decir, la suma de las longitudes de todas las aristas en el conjunto A' .

Para subconjuntos $A', A'' \subseteq A$, la *distancia media continua* se define como

$$\mu_c(A', A'') := \frac{1}{\ell(A')\ell(A'')} \iint_{p \in A', q \in A''} d_{\mathcal{G}}(p, q) dp dq. \quad (2)$$

Abusando de la notación, escribimos $\mu_c(p, \mathcal{G}')$ o $\mu_c(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$, donde $\mathcal{G}'$ y $\mathcal{G}''$ son los subgrafos de G con conjuntos de aristas A' y A'' , respectivamente.

La distancia media de un grafo continuo $\mathcal{G}$ o *distancia media continua* de su grafo asociado $G = (V, A, \ell)$ es la distancia media entre todas las aristas:

$$\mu_c(\mathcal{G}) := \mu_c(A, A). \quad (3)$$

La ventaja de expresar la distancia media en base a la distancia media entre aristas es que el cálculo de la distancia media entre dos aristas es abordable. Por ejemplo, la siguiente observación presenta dos propiedades simples pero que son fundamentales para el estudio del caso general.

Observación 2.5. Sean uv y $u'v'$ dos aristas en A .

(i) Para cualquier punto $p = (uv, u, \lambda)$ en uv se verifica que:

$$\mu_c(uv, u'v') = \frac{\lambda \mu_c(up, u'v') + (\ell(uv) - \lambda) \mu_c(pv, u'v')}{\ell(uv)}.$$

(ii) Si para cada punto $p \in uv$ y cada punto $q \in u'v'$, se verifica que $d_{\mathcal{G}}(p, q) = d_{\mathcal{G}}(p, v) + d_{\mathcal{G}}(v, q)$, entonces:

$$\mu_c(uv, u'v') = \mu_c(uv, v) + \mu_c(v, u'v').$$

Un ejemplo: caminos. Es ilustrativo ver cómo las expresiones anteriores se pueden aplicar a un ejemplo concreto, y cómo el resultado puede diferir de la versión discreta. Consideremos un camino P con n vértices y todas las aristas de longitud 1. Como ya hemos mencionado, la distancia media discreta de dicho camino es $\mu(P) = (n+1)/3$. Esto puede generalizarse de forma natural a cualquier camino P en el que cada arista tenga longitud α (longitud total $\alpha(n-1)$), en cuyo caso la distancia media es $\alpha(n+1)/3$. Sin embargo, para un camino P con aristas de distinta longitud, no hay una fórmula cerrada para calcular la distancia media, ya que depende del valor exacto de la longitud de cada arista. En cambio, es posible obtener

de forma simple una fórmula cerrada para $\mu_c(\mathcal{P})$, para cualquier camino continuo $\mathcal{P}$ con longitudes de aristas positivas arbitrarias, como se explica a continuación.

Un camino continuo $\mathcal{P}$ de longitud $t \in \mathbb{R}_{>0}$ se puede ver como el intervalo $[0, t]$. Para un punto $x \in [0, t]$, sea $d(x, [0, t])$ la función distancia entre x y cualquier otro punto x' en el intervalo $[0, t]$. El valor medio de $d(x, [0, t])$ es $\frac{1}{2t}(x^2 + (x-t)^2)$ (recordar que el valor medio de una función f sobre un intervalo $[a, b]$ se define como $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$). Por tanto,

$$\mu_c(\mathcal{P}) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{2t}(x^2 + (x-t)^2) dx = \frac{t}{3}. \quad (4)$$

Usando un enfoque diferente, en [19, 20] se obtiene el mismo resultado para caminos $\mathcal{P}$ en los que todas las aristas tienen longitud α , con $\alpha \in \mathbb{Q}^+$.

2.2.1. Cálculo de la distancia media

Además de los caminos, pocas familias de grafos tienen una estructura lo suficientemente simple como para poder dar una fórmula cerrada de la distancia media continua: ciclos, estrellas, junto a algunas combinaciones simples de estas, son de las pocas excepciones [19].

Para calcularla para un grafo continuo arbitrario utilizamos la siguiente fórmula (consecuencia directa de las Ecuaciones 2–4 y de propiedades elementales de integración), que expresa $\mu_c(\mathcal{G})$ como una suma ponderada de las distancias medias continuas de todos los pares *ordenados* de aristas:

$$\mu_c(\mathcal{G}) = \frac{1}{\ell(A)^2} \left(\sum_{(a,a') \in A \times A, a \neq a'} \mu_c(a, a') \ell(a) \ell(a') + \sum_{a \in A} \frac{\ell(a)}{3} \ell(a)^2 \right). \quad (5)$$

La Ecuación 5 nos permite reducir el cálculo de $\mu_c(\mathcal{G})$ al cálculo de la distancia media continua entre dos aristas que, como mencionamos anteriormente, es abordable. A continuación presentamos un método para calcular $\mu_c(a, a')$ en tiempo constante, una vez se ha calculado la matriz de distancias de los vértices del grafo en tiempo $A(n, m) = O(nm \log \alpha(m, n))$ [45].

En la Ecuación 5 se distinguen dos casos para calcular $\mu_c(a, a')$: que las aristas sean distintas ($a \neq a'$) o que sean la misma ($a = a'$). El segundo caso se reduce a calcular la distancia media continua de un camino, que—como hemos visto en la Ecuación 4—es igual a $\mu_c(a, a) = \ell(a)/3$, para cualquier arista a . Por lo tanto, en el resto de esta sección nos centramos en la distancia media entre dos aristas distintas.

Para calcular $\mu_c(a, a')$ para aristas distintas a y a' , lo principal es entender qué forma tienen los caminos mínimos entre ellas. Consideremos dos aristas $a = uv$ y $a' = u'v'$, y dos puntos $p \in a$ y $q \in a'$; véase la Figura 4. El camino mínimo desde p hasta q debe salir de a por uno de sus extremos, u o v , y debe entrar en a' por u' o v' .⁸ Supongamos que el camino mínimo para ir de p a q pasa por v y por u' . Entonces, $d_{\mathcal{G}}(p, q) = d_{\mathcal{G}}(p, v) + d_{\mathcal{G}}(v, u') + d_{\mathcal{G}}(u', q)$. Es importante observar que el segundo sumando, $d(v, u')$, corresponde a la longitud de un camino mínimo entre dos vértices de $\mathcal{G}$, y ésta será siempre la misma independientemente de dónde estén exactamente p y q en sus respectivas aristas.

Los caminos de la Figura 4(a) los denominamos *lineales*, porque para cualquier punto $p \in a$, el camino mínimo hacia un punto $q \in a'$ pasa por v . Los casos de la Figura 4(b) los llamamos *cíclicos*, y se producen cuando el camino mínimo desde puntos $p \in a$ hasta puntos

⁸Aunque podría haber más de un camino mínimo entre p y q , por simplicidad asumiremos que es único.

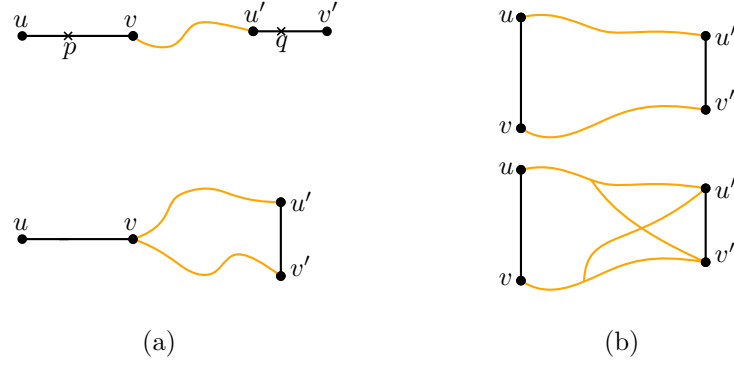


Figura 4: Casos a considerar para calcular la distancia media continua entre dos aristas distintas. (a) Casos lineales. (b) Casos cíclicos.

$q \in a'$ puede pasar por u o por v , dependiendo de la posición de los puntos en las aristas. Entre los casos cíclicos, hay uno especialmente simple: ocurre cuando la longitud de a y a' coincide, al igual que las distancias $d_G(u, u'v')$ y $d_G(v, u'v')$, dadas por los caminos mínimos entre los extremos $u-u'$ y $v-v'$ que además son disjuntos. Para una definición más precisa de cada caso véase [29]. Para los casos lineales y rectangulares podemos deducir una expresión exacta de $\mu_c(a, a')$. El caso cíclico es más complejo pero puede descomponerse en varios casos lineales y uno rectangular. Esto se resume en el siguiente lema.

Lema 2.6 ([29]). *Sean $a = uv$ y $a' = u'v'$ dos aristas distintas de un grafo G que define un grafo continuo $\mathcal{G}$.*

- En el caso lineal, $\mu_c(uv, u'v') = \frac{\ell(uv)}{2} + \mu_c(v, u'v')$.
- En el caso rectangular, $\mu_c(uv, u'v') = \theta + \frac{2\rho}{3}$, donde $\theta = d_G(u, u') = d_G(v, v')$ y $\rho = \ell(uv) = \ell(u'v')$.
- En el caso cíclico, $\mu_c(a, a')$ puede ser calculada como una suma ponderada de, a lo sumo, cuatro casos lineales y un caso rectangular.

En el Lema, $\mu_c(v, u'v')$ denota la distancia media entre un vértice y una arista, que puede calcularse mediante una fórmula que involucra la longitud de la arista $u'v'$ y las distancias $d_G(v, u')$ y $d_G(v, v')$ (véase [29, Lema 3.1]).

El resultado principal que se deriva de la discusión anterior es el siguiente:

Teorema 2.7. *La distancia media continua de un grafo con n vértices y m aristas, puede ser calculada en tiempo $O(m^2 + A(n, m))$, donde $A(n, m)$ es el tiempo requerido para calcular todas las distancias entre pares de vértices del grafo.*

Utilizando técnicas similares a las usadas para calcular el diámetro de un grafo continuo, recientemente se ha encontrado cómo calcular eficientemente la distancia media en grafos continuos con treewidth acotado por k [12]:

Teorema 2.8. *Sea $k \geq 2$ constante. La distancia media continua de un grafo con n vértices y treewidth a lo sumo k puede calcularse en tiempo $O(n \log^{4k-2} n)$.*

3. Modificaciones en grafos continuos

En los modelos de redes geográficas es natural querer hacer modificaciones para mejorar distinto tipo de factores; pensemos, por ejemplo, en una red de carreteras y en disminuir la congestión de tráfico o el tiempo de viaje. Una de las formas más simples de modificar una red es añadir nuevas aristas de modo que se aumente su conectividad y, potencialmente, se puedan mejorar factores como los mencionados. El “cuánto” se mejora se puede medir en términos del número de aristas que se deben añadir para reducir algún parámetro asociado a la red, normalmente relacionado con distancias. Estos son los llamados *problemas de aumento* que han sido (y están siendo) ampliamente estudiados para grafos combinatorios y medidas como el diámetro⁹ [5, 26], el radio [32, 33, 38] o la dilación [8, 34]. En los últimos años, los problemas de aumento se han extendido a grafos continuos, siendo el diámetro el primer parámetro considerado [2, 13, 16, 15, 28].

En esta sección presentamos una panorámica del problema de aumento para el diámetro en grafos continuos (Sección 3.1) y proponemos un nuevo tipo de modificación en grafos continuos, relacionada con la bien conocida *conjetura de Borsuk* [6] (Sección 3.2). Aunque en ambos casos nos centramos en el diámetro como parámetro en estudio, los problemas tratados se pueden plantear de forma análoga para otros parámetros.

En ambas subsecciones nos restringimos a grafos geométricos (planos). Recordemos que este tipo de grafos son grafos continuos donde cada vértice es un punto en el plano y cada arista se representa por un segmento entre los puntos correspondientes. Además, asumimos que los segmentos no se cortan salvo en sus extremos, incluyendo así la planaridad en la propia definición.

3.1. Problemas de aumento en grafos continuos

El problema de elegir las aristas adecuadas a añadir de modo que se reduzca el diámetro de un grafo geométrico G es, ya en el caso discreto, muy complejo desde el punto de vista algorítmico. Por ello, la mayoría de los trabajos al respecto se centran en la versión más simple: añadir una única arista, a la que se suele llamar *atajo*. Si en vez de reducir, el objetivo es minimizar (entre todos los posibles atajos) el diámetro del grafo resultante, el atajo se dice que es *óptimo*. Estos conceptos se extienden de forma natural al caso continuo en el que los atajos son segmentos que conectan cualquier par de puntos del grafo geométrico continuo $\mathcal{G}$ en vez de vértices de G . Señalamos en este punto que, para ser considerado un atajo, el segmento añadido debe reducir estrictamente el diámetro del grafo (continuo) resultante.

Es importante notar que no en todo grafo existe un atajo. Por ejemplo, en un ciclo—tanto discreto como continuo—existen múltiples pares diametrales, y no hay ninguna arista cuya inserción pueda reducir (por si sola) el diámetro del ciclo.

Hay diferencias fundamentales entre la versión discreta y la continua de este problema de aumento, que incrementan enormemente la dificultad en el caso continuo. Por una parte, en la versión discreta, las aristas se añaden a un grafo G conectando pares de vértices y, por tanto, hay $\binom{n}{2}$ aristas candidatas a ser añadidas. En cambio, en la versión continua, se pueden añadir nuevas conexiones entre cualquier par de puntos de $\mathcal{G}$, lo cual resulta en un número infinito de candidatas.

⁹El problema es conocido como *Diameter-Optimal- k -Augmentation problem*, donde k es el número de aristas que se añaden.

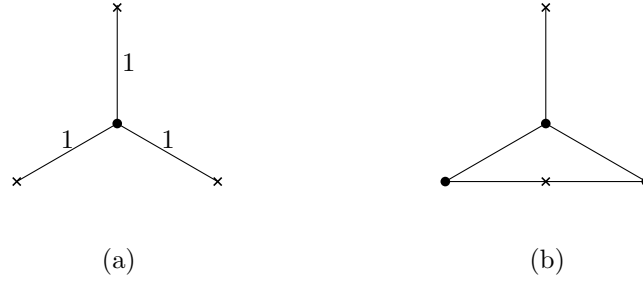


Figura 5: El diámetro continuo puede aumentar al añadir una arista. (a) Grafo original, con diámetro 2. (b) Grafo tras añadir una arista: su diámetro viene dado por un vértice original y el punto medio de la nueva arista, y es superior al original ($\approx 2,86$).

Por otra parte, al añadir una arista en el caso discreto, el diámetro solo puede disminuir o permanecer igual (lo primero ocurre, si y solo si, la nueva arista acorta la distancia entre todos los pares diametrales). No puede ocurrir que al añadir una arista empeore el diámetro. Sin embargo, esto sí es posible en el caso continuo, ya que todos los puntos sobre la nueva arista pasan a participar del cálculo del diámetro, y podrían dar una distancia mayor al diámetro original. Un ejemplo de esta situación, bastante contraintuitiva, puede verse en la Figura 5. Efectivamente, el hecho de que todos los puntos sobre las aristas del grafo deban ser tenidos en cuenta convierte el cálculo de distancias y la colocación de un atajo en un problema mucho más difícil que para el caso discreto.

3.1.1. Modelos

Para poder definir correctamente el problema de encontrar un atajo (óptimo) para un grafo continuo es necesario precisar qué ocurre si la arista insertada corta a otras aristas ya existentes. Esto da lugar a dos variantes del problema, dependiendo de cómo se inserte el atajo en el grafo continuo:

- *Modelo de autopista*: los cruces entre el atajo y las aristas del grafo continuo no son tenidos en cuenta en el grafo resultante, es decir, no generan un nuevo vértice. Esto implica que un camino solo puede entrar y salir del atajo a través de sus puntos extremos.
- *Modelo planar*: se inserta un nuevo vértice en cada punto de corte, que puede ser usado por los caminos en el grafo continuo resultante.

El modelo planar es más general ya que puede modelar una gama más amplia de situaciones, como modificaciones en redes viales o peatonales. Desde un punto de vista teórico, la diferencia entre ambos modelos es muy importante: el modelo planar genera problemas más complejos, ya que el hecho de que un atajo pueda ser utilizado solo en parte, implica que la información estructural sobre cómo cambian las distancias en el grafo tras añadir un segmento es más difícil de mantener.

3.1.2. Cálculo de un atajo óptimo

El problema algorítmico de encontrar un atajo óptimo en un grafo combinatorio es sencillo si nos conformamos con cualquier algoritmo polinomial. En efecto, dado que hay $\binom{n}{2}$ atajos

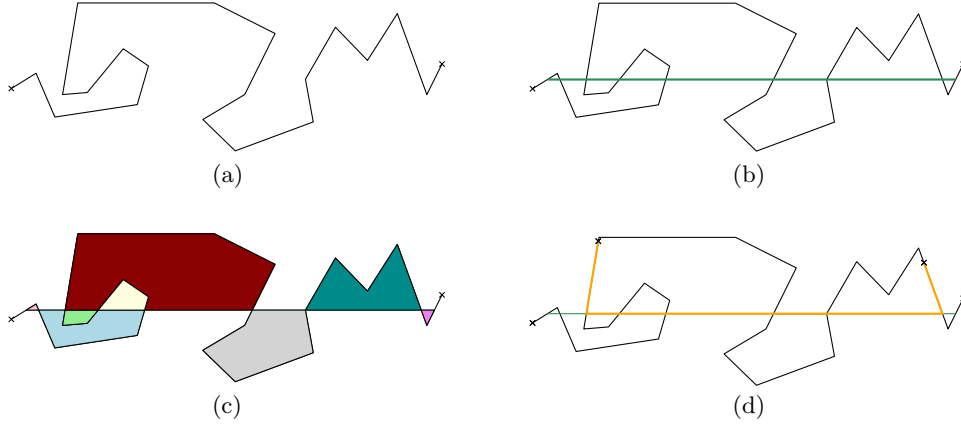


Figura 6: (a) Un camino, al que se le añade un segmento (verde) en (b). (c) La inserción del segmento crea ocho caras acotadas. (d) El diámetro en el nuevo grafo viene dado por un par de puntos en dos de esas caras (en amarillo se indica un camino mínimo entre dichos puntos).

posibles, es suficiente con considerar cada uno de ellos, para cada uno insertar la arista, y recalculer el diámetro, devolviendo de entre todos ellos el atajo que proporcione un diámetro menor. Todo esto lleva de manera directa a un algoritmo de complejidad $O(n^4)$. El desafío en este problema consiste en obtener algoritmos más eficientes, sobre lo que existen decenas de trabajos.

En cambio, para grafos continuos no existe un algoritmo exhaustivo polinomial como en el caso discreto, ya que se parte de un número infinito de segmentos candidatos. Esto requiere aplicar técnicas específicas que exploten la geometría del problema y lo permitan discretizar. Por otro lado, el modelo elegido (de autopista o planar) determina en gran parte la dificultad del problema.

Para el modelo de autopista se conocen algoritmos eficientes para varias clases de grafos, como caminos y árboles. Para caminos de longitud n , De Carufel et al. [16] propusieron un algoritmo para encontrar un atajo óptimo en tiempo $O(n)$; también en tiempo lineal encuentran pares óptimos de atajos en el caso de ciclos convexos. Los árboles han sido estudiados en un trabajo posterior [15], donde se presenta un algoritmo para encontrar un atajo óptimo para un árbol de tamaño n en tiempo $O(n \log n)$. También en el modelo de autopista, Bae et al. [2] han estudiado el caso particular de grafos continuos cuyos infinitos puntos describen un círculo en el plano, presentando maneras óptimas de añadir hasta siete atajos.

El modelo planar ha sido mucho menos explorado. A continuación profundizaremos en este modelo, para intentar transmitir parte de las dificultades del problema, que surgen del hecho de que la inserción de un segmento pueda crear múltiples nuevos puntos de entrada y salida (para los caminos) a la hora de tomar un atajo.

Atajo óptimo para un camino. El diámetro de un camino continuo $\mathcal{P}$ siempre viene dado por la distancia entre sus extremos. Sin embargo, al insertar un segmento s en $\mathcal{P}$ en el modelo planar, obtenemos un grafo, que denotamos $\mathcal{P} \cup s$, que no es un camino, sino algo mucho más complejo. Como se ilustra en la Figura 6, la inserción de una nueva arista puede crear un gran número de caras (concretamente, si el camino tiene n vértices, pueden surgir $\Theta(n)$ caras). El diámetro de $\mathcal{P} \cup s$ vendrá dado o por la distancia máxima entre dos de esas caras, o por una

cara y un extremo del camino, o por los dos extremos. En la figura, el nuevo diámetro viene dado por los dos puntos más lejanos de dos de las nuevas caras (la roja y la verde azulado), como se indica en la Figura 6(d). Esto implica que para determinar $\text{diam}(\mathcal{P} \cup s)$ es necesario calcular todas las caras creadas y considerar las distancias entre cada par de ellas; también, las distancias con los extremos y entre los propios extremos.

Calcular un atajo óptimo es todavía más desafiante, hasta el punto de que, a día de hoy, es un problema abierto cómo hacerlo de manera eficiente. A continuación presentamos a grandes rasgos un algoritmo para calcular un atajo óptimo *horizontal* s para un camino continuo $\mathcal{P}$ [28] (horizontal, o de cualquier otra orientación *fija*). Asumiremos que no todos los vértices de $\mathcal{P}$ están alineados (para que siempre exista algún atajo).

Una propiedad útil de los atajos en caminos, es que si un segmento es un atajo, cualquier extensión de dicho segmento seguirá siéndolo. Más precisamente, cualquier segmento que insertemos en un camino (no contenido en una arista del camino) es un atajo (propiedad que no se cumple para árboles como muestra la Figura 5); así, cualquier segmento que contenga a un atajo (y tenga sus extremos en el camino) también será un atajo. Esto simplifica la búsqueda porque permite restringirse a segmentos maximales, o lo que es equivalente, a rectas horizontales.

El algoritmo que describimos a continuación es un algoritmo de barrido, que considera, implícitamente, todas las rectas horizontales que intersectan el camino $\mathcal{P}$, barriéndolas de abajo hacia arriba.

Sea $r(y)$ la recta horizontal que cruza el eje vertical a altura y . A medida que y aumenta, $\text{diam}(\mathcal{P} \cup r(y))$ va cambiando. Recordemos que para y fija, el diámetro es el máximo entre las distancias entre todos los pares de caras (y los extremos del camino, pero a partir de ahora los trataremos como dos caras más, “degeneradas”). Por lo tanto, el diámetro como función de y es el máximo de $O(n^2)$ funciones. Se puede demostrar que cada una de estas funciones, que da la distancia máxima entre dos caras concretas, es una función lineal en y , que veremos geoméricamente como rectas en el plano. El máximo de estas $O(n^2)$ funciones lineales, también como función de y , se puede representar geoméricamente como la *envolvente superior*¹⁰ de las $O(n^2)$ rectas asociadas con cada par de caras.

La Figura 7 muestra un ejemplo, en el que la inserción de un segmento a altura y crea dos caras acotadas. Considerando además los dos extremos del camino, en total hay cuatro caras. Cada par de ellas resulta en una función lineal. La envolvente superior de las seis rectas (en rosa en la figura) está formada por porciones conexas de tres rectas; la coordenada y de su punto mínimo proporciona el valor de y del atajo óptimo s , es decir, el que proporciona el menor diámetro posible de $\mathcal{P} \cup s$ (para s horizontal).

Por consiguiente, la idea principal del algoritmo para encontrar un atajo horizontal óptimo de $\mathcal{P}$ consiste en considerar las rectas asociadas a los $O(n^2)$ pares de caras, calcular su envolvente superior, y extraer su punto mínimo. Un resultado clásico de la geometría computacional es que la envolvente superior de $O(n^2)$ rectas puede calcularse en tiempo $O(n^2 \log n)$.

Sin embargo, hay un problema con este enfoque. Las caras de $\mathcal{P} \cup r(y)$ varían con y . Por ejemplo, en la Figura 7, la cara C_3 no existe si y es mayor que la altura del extremo derecho del camino. Las funciones de la Figura 7(c) sólo son válidas para los valores de y que dan lugar a esas cuatro caras (concretamente, para y en el rango de ordenadas y de los extremos del camino). Esto significa que es necesario recalcular las caras, funciones lineales y envolvente superior cada vez que la secuencia de segmentos del camino intersectados por

¹⁰La *envolvente superior* de un conjunto de k funciones $f_1(x), \dots, f_k(x)$ es $\text{env}(x) = \max_{1 \leq i \leq k} f_i(x)$.

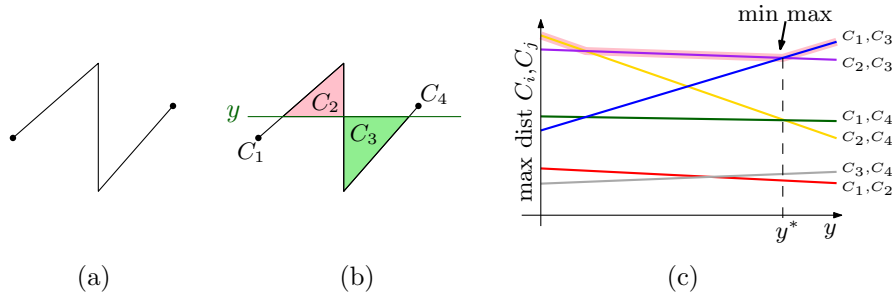


Figura 7: (a) Un camino. (b) Al insertar el segmento maximal en la recta horizontal con coordenada y , se crean dos caras acotadas (C_2, C_3); los extremos son tratados como caras degeneradas (C_1, C_4). (c) Cada par de caras resulta en una función lineal en y , que representa su distancia máxima. Para cada valor de y , el diámetro es la mayor de esas seis funciones. La función máximo es la envolvente superior de esas funciones (en rosa); el mínimo de esa envolvente (y^*) corresponde al atajo óptimo.

la recta horizontal cambia. Es fácil observar que esto ocurre cada vez que la recta horizontal pasa por un vértice de $\mathcal{P}$, por lo cual hay n conjuntos de caras a considerar.

El algoritmo queda entonces como sigue. Comenzando desde la recta horizontal más baja que pasa por un vértice del camino, $r(y_0)$, se calculan las caras de $\mathcal{P} \cup r(y_0 + \varepsilon)$ (para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño). En base a ellas se representan las respectivas funciones lineales de distancias máximas entre caras, su envolvente superior, y su mínimo. A continuación, se considera la siguiente coordenada y (en orden ascendente) de entre los vértices del camino, y se recalcula todo. Afortunadamente, no es necesario comenzar desde cero cada vez que se pasa por un nuevo vértice. Existen algoritmos *dinámicos*, que permiten mantener la envolvente superior (y su mínimo) entre pasos consecutivos, de manera que el costo de pasar por un vértice sea bajo (concretamente, tiempo $O(\log n)$ por actualización). Omitiendo algunos detalles técnicos más, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Dado un camino continuo $\mathcal{P}$ con n vértices, se puede determinar si existe un atajo horizontal, y si es así, encontrar uno óptimo en tiempo $O(n^2 \log n)$.*

Atajo óptimo para un grafo general. Algunas de las ideas del algoritmo anterior pueden adaptarse a grafos generales y atajos con cualquier orientación. Sin embargo, los detalles son intrincados y dan lugar a un algoritmo de complejidad mucho mayor, aunque polinomial.

Nuevamente, la idea general es representar la función diámetro geoméricamente, como el máximo de un conjunto de funciones que dan la distancia máxima entre todo par de aristas y/o vértices. Sin embargo, esto requiere un gran número de funciones, que a su vez deben ser clasificadas en un gran número de clases.

El resultado que sigue se basa en considerar $O(n^4)$ funciones en dos variables a, b que representan distancias máximas entre pares de aristas o vértices tras insertar un segmento contenido en la recta $y = ax + b$. A su vez, es necesario clasificar estas funciones en $O(n^4)$ clases distintas—según qué aristas del grafo continuo $\mathcal{G}$ intersecta cada una—y cada una debe ser optimizada por separado. Al representar geoméricamente estas funciones, se pueden aplicar nuevamente herramientas como envolventes superiores, ahora en una dimensión más, para encontrar el atajo óptimo en tiempo polinomial.

Teorema 3.2. *Dado un grafo continuo $\mathcal{G}$ con n vértices, se puede determinar si existe un atajo, y si es así, encontrar uno óptimo en tiempo polinomial en n .*

Es importante destacar que el gran número de funciones que considera este algoritmo hace que la complejidad, aunque polinomial, sea demasiado alta para ser de utilidad práctica.

Es un problema abierto cómo de eficientemente se puede encontrar un atajo óptimo. Otros problemas abiertos menos ambiciosos, pero para nada fáciles, son diseñar un algoritmo eficiente para calcular un atajo óptimo (de cualquier orientación) en un camino, y calcular un atajo óptimo horizontal en un árbol. Todavía más lejos quedan los problemas abiertos, aún más naturales, de insertar $k > 1$ atajos para producir un grafo con el menor diámetro continuo posible.

3.2. La conjetura de Borsuk en grafos

Un problema clásico ampliamente estudiado en el contexto de la geometría combinatoria es la *conjetura de Borsuk* que afirma que todo conjunto acotado del espacio d -dimensional puede ser dividido en $d + 1$ subconjuntos cerrados de modo que cada uno tenga diámetro estrictamente menor que el del conjunto original [6]. El diámetro al que se refiere esta conjetura es el concepto clásico: el máximo de las distancias euclídeas entre cualesquiera dos puntos del conjunto. Desde que fue establecida en 1933, atrajo la atención de un gran número de investigadores. Perkal en 1947 y Eggleston en 1955 demostraron que la conjetura era cierta, respectivamente, para conjuntos planos y 3-dimensionales ($d = 2, 3$) [44, 23]. Se estableció también la veracidad de la conjetura para conjuntos convexos con distintos tipos de propiedades [35, 48] pero, en 1993, Kahn y Kalai [39] la refutaron: demostraron que el número mínimo de subconjuntos necesarios para dividir el conjunto, de forma que todos ellos tengan menor diámetro que el original, crece exponencialmente con la dimensión d . A este número mínimo se le conoce como *número de Borsuk* y se le denota por $b(X)$ para un conjunto d -dimensional X .

La pregunta de Borsuk se puede entonces enunciar como: ¿es $b(X) \leq d + 1$ para cualquier conjunto acotado $X \subset \mathbb{R}^d$? En su trabajo, Kahn y Kalai establecieron $d = 9162$ como cota superior ajustada de cumplimiento de la conjetura y, desde entonces, disminuir esta cota ha sido un objetivo para muchos investigadores, estando establecida actualmente en $d = 64$ [37]. Remitimos al lector a [57] para ampliar la información sobre variantes del problema de Borsuk.

Recientemente, se ha presentado la primera formulación del problema de Borsuk en el contexto de la teoría de grafos [14]. La idea es análoga, se desea dividir un grafo geométrico plano en subgrafos, disminuyendo su diámetro continuo y determinando el número mínimo de subgrafos necesarios para ello. La primera cuestión que surge tras esta idea es cómo se divide de forma consistente un grafo continuo.

Una recta r divide a un grafo continuo $\mathcal{G}$ en dos subgrafos (quizás uno vacío) a los que se les requiere, de forma natural, que sean conexos al igual que lo era el grafo original. Para ello, se añade a ambos subgrafos el segmento s de mayor longitud contenido en la recta r y cuyos extremos están en $\mathcal{G} \cup r$. Así, en realidad, la partición por una recta r da lugar a dos subgrafos de $\mathcal{G} \cup r$:

$$\mathcal{G}_1 = (r^+ \cap \mathcal{G}) \cup s \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_2 = (r^- \cap \mathcal{G}) \cup s,$$

donde r^+ y r^- son los semiplanos abiertos determinados por la recta r . Además, cada punto de intersección del segmento s con $\mathcal{G}$ se considera un nuevo vértice en cada uno de los grafos resultantes. Se define entonces el *número de Borsuk* de $\mathcal{G}$, y se denota por $b(\mathcal{G})$, como el

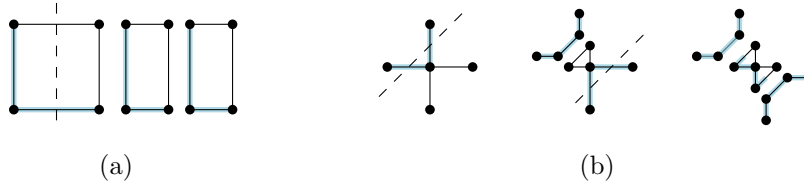


Figura 8: (a) Cada arista del ciclo tiene longitud 1 y, por tanto, el ciclo tiene diámetro continuo 2 (dado, entre otros, por los caminos con aristas en color verde); la recta (en línea discontinua) divide al ciclo en dos ciclos de diámetro continuo 1,5. (b) Partición secuencial de una estrella de diámetro continuo 2: en la división con una primera recta, uno de los dos subgrafos resultantes tiene también diámetro 2 (independientemente de la recta elegida) y, por ello, se necesita una segunda recta.

tamaño mínimo de una partición de $\mathcal{G}$ mediante rectas $r_1, \dots, r_k$ en subgrafos $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{k+1}$ (de $\mathcal{G} \cup r_1 \cup \dots \cup r_k$) tal que:

$$\max\{\text{diam}(\mathcal{G}_1), \dots, \text{diam}(\mathcal{G}_{k+1})\} < \text{diam}(\mathcal{G}).$$

Cuando se necesita emplear más de una recta para disminuir el diámetro, la partición se hace de forma secuencial y, a fin de garantizar que el corte correspondiente genere como mucho dos subgrafos, cada recta r_i se inserta solamente en uno de los subgrafos generados hasta ese momento.

La Figura 8 ilustra este proceso de partición; tenemos un ciclo de longitud 4 y un grafo estrella de 5 vértices. En el primer caso, podemos reducir su diámetro continuo con una única recta, generando dos subgrafos y por tanto su número de Borsuk es 2. En cambio, con una única recta no podemos disminuir el diámetro continuo de la estrella de la figura, se necesitan dos rectas que dividirán al grafo en 3 subgrafos y, por tanto, su número de Borsuk es 3.

Como la conjetura de Borsuk para conjuntos en el plano es cierta [44], es decir, $b(X) \leq 3$ para cualquier conjunto plano acotado X , la primera pregunta que se plantea en la extensión del problema a grafos es si se puede acotar $b(\mathcal{G})$ por una constante. En la actualidad, este es un problema abierto y la mejor aproximación es una cota superior de orden lineal en el número de vértices de $\mathcal{G}$ [14]. La construcción que da lugar a esta cota sugiere que, para avanzar en este problema, se necesitarán nuevas técnicas: la dificultad principal reside en que al insertar nuevos puntos (pertenecientes a las rectas de corte), toda la estructura de caminos mínimos iniciales, en principio, se modifica y, con las técnicas actuales, no se sabe como explotar la información de la que uno disponía.

En [14] se presentan distintas vías para profundizar en el estudio de la acotación del número de Borsuk por una constante. Por una parte, se estudian grafos continuos que tienen una cierta propiedad de monotonía y se establece una cota que depende del número de *conjuntos diametrales* disjuntos que tenga el grafo: dado un par de puntos diametrales p, q de un grafo continuo $\mathcal{G}$, su conjunto diametral asociado es la unión de todos los caminos mínimos que conectan p y q ; por ejemplo, un ciclo tiene un número infinito de pares diametrales pero, para todos ellos, el conjunto diametral es el mismo (el propio ciclo). La dependencia de esta cota en los conjuntos diametrales provoca que se inicie un estudio sobre el número de conjuntos diametrales disjuntos que puede tener un grafo geométrico plano, cuestión que tiene interés por sí misma y que también sigue abierta.

Por otra parte, en [14] se demuestra que $b(\mathcal{T}) \leq 3$ para todo árbol continuo $\mathcal{T}$ de n vértices

y se propone un algoritmo cuadrático en n para determinar el valor exacto del número de Borsuk. El diseño del algoritmo refleja, una vez más, la dificultad de analizar los cambios que sufren los caminos mínimos, incluso, al dividir un árbol. Esto hace pensar que para realizar un estudio algorítmico del número de Borsuk de un grafo continuo arbitrario también se deben desarrollar nuevas técnicas y, desde luego, es un problema desafiante en el contexto de los grafos continuos.

4. Conclusiones

En este artículo hemos presentado la noción de grafos continuos, una generalización natural de los grafos que encuentra aplicaciones en numerosos contextos. Nos hemos centrado en una de las familias de problemas más importantes en teoría de grafos: los de distancias. En la primera parte de este trabajo tratamos, en el contexto continuo, el cálculo del diámetro y la distancia media, dos parámetros clásicos que involucran distancias. La segunda parte está dedicada a dos problemas de modificación de grafos continuos: agregar atajos y subdividir un grafo en subgrafos con menor diámetro continuo. Los problemas estudiados son bastante fundamentales y relativamente fáciles de enunciar, pero a pesar de ello la mayoría de las preguntas naturales sobre ellos están todavía abiertas. Nuestro trabajo da una idea de las consecuencias de trasladar nociones básicas y conocidas sobre grafos al terreno de los grafos continuos, dejando en evidencia muchas de las complicaciones que esto comporta a nivel conceptual y, sobre todo, algorítmico.

Agradecimientos

Los autores agradecen a Alberto Márquez por ayudar a perfilar este trabajo, a Vera Sacristán por muchas sugerencias sobre cómo mejorar la presentación del artículo, y a los revisores del *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* por sus comentarios en la versión en catalán de este artículo, muchos de los cuales también han servido para mejorar esta versión. Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto PID2023-150725NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

- [1] A. Abboud, V. V. Williams y J. Wang. “Approximation and fixed parameter subquadratic algorithms for radius and diameter in sparse graphs”. En: *Proceedings of the 27th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA’16)*. SIAM, 2016, págs. 377-391.
- [2] S. W. Bae, M. D. Berg, O. Cheong, J. Gudmundsson y C. Levkopoulos. “Shortcuts for the circle”. En: *Computational Geometry: Theory and Applications* 79 (2019), págs. 37-54.
- [3] L. N. Baptista, J. B. Kennedy y D. Mugnolo. “Mean distance on metric graphs”. En: *The Journal of Geometric Analysis* 34.137 (2024), págs. 1-25.
- [4] P. Bergé, G. Ducoffe y M. Habib. “Subquadratic-time algorithm for the diameter and all eccentricities on median graphs”. En: *Theory of Computing Systems* 68.1 (2024), págs. 144-193.

- [5] D. Bilò, L. Gualà, S. Leucci y L. P. Sciarria. “Finding diameter-reducing shortcuts in trees”. En: *Algorithms and Data Structures - 18th International Symposium, WADS 2023*. Ed. por P. Morin y S. Suri. Vol. 14079. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2023, págs. 164-178.
- [6] K. Borsuk. “Three theorems on the n -dimensional sphere”. En: *Fundamenta Mathematicae* 20 (1933), págs. 177-190.
- [7] K. Bringmann, T. Husfeldt y M. Magnusson. “Multivariate analysis of orthogonal range searching and graph distances”. En: *Algorithmica* 82 (2020), págs. 2292-2315.
- [8] K. Buchin, M. Buchin, J. Gudmundsson y S. Wong. “Bicriteria Approximation for minimum dilation graph augmentation”. En: *32nd Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2024*. Ed. por T. Chan, J. Fischer, J. Iacono y G. Herman. Vol. 308. LIPIcs. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2024, 36:1-36:15.
- [9] F. Buckley. “Mean distance in line graphs”. En: *Congressus Numerantium* 32 (1976), págs. 153-162.
- [10] F. Buckley y L. Superville. “Distance distributions and mean distance problems”. En: *Proceedings of the 3rd Caribbean Conference on Combinatorics and Computing*. 1981, págs. 67-76.
- [11] S. Cabello. “Subquadratic algorithms for the diameter and the sum of pairwise distances in planar graphs”. En: *ACM Transactions on Algorithms* 15.2 (2019), 21:1-21:38.
- [12] S. Cabello, D. Garijo, A. Kalb, F. Klute, I. Parada y R. I. Silveira. “Algorithms for distance problems in continuous graphs”. En: *CoRR* abs/2503.07769 (2025). arXiv: 2503.07769.
- [13] J. Cáceres, D. Garijo, A. González, A. Márquez, M. L. Puertas y P. Ribeiro. “Shortcut sets for the locus of plane Euclidean networks”. En: *Applied Mathematics and Computation* 334 (2018), págs. 192-205.
- [14] J. Cáceres, D. Garijo, A. Márquez y R. I. Silveira. “The Borsuk number of a graph”. En: *Proceedings of the Discrete Mathematics Days*. Ed. por D. Garijo, D. Orden y F. Santos. Editorial Universidad de Alcalá, 2024, págs. 141-146.
- [15] J. L. D. Carufel, C. Grimm, A. Maheshwari, S. Schirra y M. Smid. “Minimizing the continuous diameter when augmenting a geometric tree with a shortcut”. En: *Computational Geometry: Theory and Applications* 89. 101631 (2020), págs. 1-34.
- [16] J. L. D. Carufel, C. Grimm, A. Maheshwari y M. Smid. “Minimizing the continuous diameter when augmenting paths and cycles with shortcuts”. En: *15th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory*. 2016, 27:1-27:14.
- [17] C. E. Chen y R. S. Garfinkel. “The generalized diameter of a graph”. En: *Networks* 12.3 (1982), págs. 335-340. DOI: 10.1002/net.3230120310.
- [18] P. Dankelmann. “Average distance in weighted graphs”. En: *Discrete Mathematics* 312.1 (2012), págs. 12-20.
- [19] J. K. Doyle y J. E. Graver. “A summary of results on mean distance in shapes”. En: *Environment and Planning B: Planning and Design* 9 (ene. de 1982), págs. 177-179.
- [20] J. K. Doyle y J. E. Graver. “Mean distance for shapes”. En: *Journal of Graph Theory* 6.4 (1982), págs. 453-471.

- [21] J. K. Doyle y J. E. Graver. “Mean distance in a graph”. En: *Discrete Math.* 17 (1977), págs. 147-154.
- [22] G. Ducoffe, M. Habib y L. Viennot. “Diameter computation on H-minor free graphs and graphs of bounded (distance) VC-dimension”. En: *Proceedings of the 31st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA’20)*. Ed. por S. Chawla. SIAM, 2020, págs. 1905-1922.
- [23] H. G. Eggleston. “Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter”. En: *Journal of the London Mathematical Society* 30 (1955), págs. 11-24.
- [24] R. C. Entringer, D. E. Jackson y D. A. Snyder. “Distance in graphs”. En: *Czechoslovak Mathematical Journal* 26 (1976), págs. 283-296.
- [25] O. Favaron, M. Kouider y M. Mahéo. “Edge-vulnerability and mean distance”. En: *Networks* 19.5 (1989), págs. 493-504.
- [26] F. Frati, S. Gaspers, J. Gudmundsson y L. Mathieson. “Augmenting graphs to minimize the diameter”. En: *Algorithmica* 72 (2015), págs. 995-1010.
- [27] L. Friedlander. “Genericity of simple eigenvalues for a metric graph”. En: *Israel Journal of Mathematics* 146 (2005), págs. 149-156.
- [28] D. Garijo, A. Márquez, N. Rodríguez y R. I. Silveira. “Computing optimal shortcuts for networks”. En: *European Journal of Operational Research* 279.1 (2019), págs. 26-37.
- [29] D. Garijo, A. Márquez y R. I. Silveira. “Continuous mean distance of a weighted graph”. En: *Results in Mathematics* 78.139 (2023), págs. 1-36.
- [30] D. Garijo y R. I. Silveira. “Problemes de distàncies en grafs continus”. En: *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 40.1-2 (2026), págs. 43-67.
- [31] P. Gawrychowski, H. Kaplan, S. Mozes, M. Sharir y O. Weimann. “Voronoi diagrams on planar graphs, and computing the diameter in deterministic $O(n^{5/3})$ time”. En: *SIAM Journal on Computing* 50.2 (2021), págs. 509-554.
- [32] J. Gudmundsson e Y. Sha. “Algorithms for radius-optimally augmenting trees in a metric space”. En: *Computational Geometry: Theory and Applications* 114.102018 (2023), págs. 1-10.
- [33] J. Gudmundsson e Y. Sha. “Augmenting graphs to minimize the radius”. En: *Computational Geometry: Theory and Applications* 114.101996 (2023), págs. 1-14.
- [34] J. Gudmundsson y S. Wong. “Improving the dilation of a metric graph by adding edges”. En: *ACM Transactions on Algorithms* 18.3 (2022), 20:1-20:20.
- [35] H. Hadwiger. “Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers”. En: *Commentarii Mathematici Helvetici* 19.1 (1946), págs. 72-73.
- [36] M. R. Henzinger, P. Klein, S. Rao y S. Subramanian. “Faster shortest-path algorithms for planar graphs”. En: *Journal of Computer and System Sciences* 55.1 (1997), págs. 3-23.
- [37] T. Jenrich y A. E. Brouwer. “A 64-dimensional counterexample to Borsuk’s conjecture”. En: *Electronic Journal of Combinatorics* 21.4.29 (2014), págs. 1-34.

- [38] C. Johnson y H. Wang. “A linear-time algorithm for radius-optimally augmenting paths in a metric space”. En: *Computational Geometry: Theory and Applications* 96.101759 (2021), págs. 1-21.
- [39] J. Kahn y G. Kalai. “A counterexample to Borsuk’s conjecture”. En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 29.1 (1993), págs. 60-62.
- [40] C. Kuratowski. “Sur le problème des courbes gauches en Topologie”. fre. En: *Fundamenta Mathematicae* 15.1 (1930), págs. 271-283.
- [41] G. Lumer. “Connecting of local operators and evolution equations on networks”. En: *Potential Theory Copenhagen 1979*. 1980, págs. 219-234.
- [42] L. March y P. Steadman. *The geometry of environment*. Royal Institute of British Architects, London, 1971.
- [43] J. Pach. “Geometric Graph Theory”. En: *Handbook of Discrete and Computational Geometry (Third Edition)*. (J. E. Goodman, J. O’Rourke, y C. D. Tóth eds.), CRC Press LLC, 2017, págs. 257-279. ISBN: 978-1498711395.
- [44] J. Perkal. “Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur”. En: *Colloquium Mathematicum* 1 (1947), pág. 45.
- [45] S. Pettie y V. Ramachandran. “A shortest path algorithm for real-weighted undirected graphs”. En: *SIAM Journal on Computing* 34.6 (2005), págs. 1398-1431.
- [46] J. D. Phillips, W. Schwanghart y T. Heckmann. “Graph theory in the geosciences”. En: *Earth-Science Reviews* 143 (2015), págs. 147-160.
- [47] J. Plesník. “On the sum of all distances in a graph or a digraph”. En: *Journal of Graph Theory* 8.1 (1984), págs. 1-21.
- [48] A. S. Rissling. “Das Borsuksche Problem in dreidimensionalen Räumen konstanter Krümmung”. Russian. En: *Ukrainskij Geometricheskij Sbornik* 11 (1971), págs. 78-83. ISSN: 0135-6992.
- [49] L. Roditty y V. V. Williams. “Fast approximation algorithms for the diameter and radius of sparse graphs”. En: *Proceedings of the 45th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC’13)*. ACM, 2013, págs. 515-524.
- [50] J. Rué. “De la teoria de grafs clàssica a l’anàlisi de les grans xarxes”. En: *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 38 (2023), págs. 67-105.
- [51] O. Serra. “Límits de grafs”. En: *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 35.1 (2020), págs. 57-79.
- [52] M. I. Shamos. “Computational geometry.” AAI7819047. Tesis doct. USA, 1978.
- [53] Ľ. Šoltés. “Transmission in graphs: A bound and vertex removing”. En: *Mathematica Slovaca* 41 (1991), págs. 11-16.
- [54] M. Thorup. “Undirected single-source shortest paths with positive integer weights in linear time”. En: *Journal of the ACM* 46.3 (1999), págs. 362-394.
- [55] M. P. Viana, E. Strano, P. Bordin y M. Barthélemy. “The simplicity of planar networks”. En: *Scientific reports* 3.3495 (2013), págs. 1-6.
- [56] H. Wiener. “Structural determination of paraffin boiling points”. En: *Journal of the American Chemical Society* 69.1 (1947), págs. 17-20.

- [57] C. Zong. “Borsuk’s partition conjecture”. En: *Japanese Journal of Mathematics* 16 (2021), págs. 185-201.